

## **Feilrater av ulike modulasjonstyper over gaussiske og fading kanaler**

Duc V. Duong

Forsvarets forskningsinstitutt (FFI)

10. desember 2007

FFI-rapport 2007/02216

1028

ISBN 978-82-464-1290-0

## Emneord

Symbolfeil rate (SER)

Bitfeil rate (BER)

Koherent kommunikasjon

Inkoherent kommunikasjon

Digitalmodulasjon

## Godkjent av

Walther Åsen

Prosjektleder

Vidar Stensrud Andersen

Avdelingssjef

## Sammendrag

Symbolfeil rater (SER) og bitfeil rater (BER) for de mest vanlige digitale modulasjonstyper er forsøkt samlet i denne rapporten hvor samme notasjon er konsekvent brukt. De ulike type modulasjoner behandlet i rapporten er: multiple amplitude modulasjon ( $M$ -AM), multiple phase shift keying ( $M$ -PSK), multiple kvadratur modulasjon ( $M$ -QAM), og multiple frequency shift keying ( $M$ -FSK). Det er analysert for både koherent og inkoherent kommunikasjon, og kommunikasjon over gaussiske og fading kanaler. For fading scenarier har vi brukt Nakagami- $m$  modell. Fordelen med denne modellen er at den ofte gir lukket-form resultater, samt mulighet til å analysere andre fadingtyper ved å endre på parameteren  $m$ .

Feilrater er ofte gitt i form av error-funksjonen (eller den komplementære error-funksjonen), eller av den klassiske gaussisk  $Q$ -funksjonen. Denne klassiske  $Q$ -funksjonen har 2 svakheter som man gjerne vil unngå, spesielt når man studerer kommunikasjon over fading kanaler. Ved å uttrykke  $Q$ -funksjonen på en annen måte, presenterer vi også alternative uttrykker for SER og BER. Approximasjoner og “bounds” er også gitt for noen modulasjoner noen steder i rapporten.

Tilslutt er det hensiktsmessig å nevne at rapporten tar for seg det matematiske grunnlaget for feilrater til ulike modulasjoner, og den kan være uinteressant for de som ikke trenger å forholde seg til slike analyser.

## English summary

This report contains the analysis of symbol-error rate (SER) and bit-error rate (BER) of the most usual digital modulation types, where the same notations are used throughout. The modulations studied are: multiple amplitude modulation ( $M$ -AM), multiple phase shift keying ( $M$ -PSK), multiple quadrature modulation ( $M$ -QAM), and multiple frequency shift keying ( $M$ -FSK). Both coherent and incoherent communications, as well as communications over additive white Gaussian noise and fading channels are considered. For fading cases, we have used a Nakagami- $m$  model. One advantage of this model is that it often results in closed-form expressions. Other types of fading can also be generated by changing the parameter  $m$ .

Error rate expressions are often given using error-function (or complementary error-function), or the classical Gaussian  $Q$ -function. However, this classical  $Q$ -function has 2 weaknesses which we want to avoid, at least when working on communications over fading channels. By representing this function in another way, the error rate expressions are expressed differently. Some of them are given in this report. Approximations and bounds on SER and/or BER are also given for some modulations.

## Innhold

<b>1</b>	<b>Introduksjon</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Basisbånd ekvivalente signaler</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Signalrom og vektorrom konsept</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Optimal detektor</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Representasjon av digitalmodulerte signaler - Koherent kommunikasjon</b>	<b>12</b>
5.1	<i>M</i> -AM	13
5.2	<i>M</i> -PSK	13
5.3	<i>M</i> -QAM	14
5.4	<i>M</i> -FSK	14
<b>6</b>	<b>Gaussisk <math>Q</math>-funksjon og error-funksjon</b>	<b>15</b>
6.1	Gaussisk $Q$ -funksjon	15
6.2	Error-funksjon	16
6.3	Relasjon mellom $Q$ - og error-funksjonen	16
<b>7</b>	<b>Analysen av feilrater over gaussiske kanaler - Koherent kommunikasjon</b>	<b>16</b>
7.1	<i>M</i> -AM	17
7.1.1	SER	17
7.1.2	Bitfeil rate (BER)	19
7.2	<i>M</i> -PSK	19
7.2.1	SER	19
7.2.2	“Bounds” på SER for MPSK signaler	22
7.2.3	BER	23
7.3	<i>M</i> -QAM	24
7.3.1	SER	24
7.3.2	BER	28

7.4	<i>M</i> -FSK	30
7.4.1	SER	30
7.4.2	Noen spesielle tilfeller som resulterer i lukket-form løsninger	33
7.4.3	BER	34
<b>8</b>	<b>Fading kanaler</b>	<b>35</b>
8.1	Fading modeller	36
8.2	Integral av MGF for Nakagami modell	37
8.2.1	Integral hvor $Q$ -funksjonen er involvert	37
8.2.2	Integral hvor $Q^2$ -funksjonen er involvert	37
<b>9</b>	<b>Analysen av feilrater over fading kanaler - Koherent kommunikasjon</b>	<b>38</b>
9.1	<i>M</i> -AM	38
9.1.1	SER	38
9.1.2	BER	39
9.2	<i>M</i> -PSK	40
9.2.1	SER	40
9.2.2	BER	41
9.3	<i>M</i> -QAM	43
9.3.1	SER	43
9.3.2	BER	45
9.4	<i>M</i> -FSK	49
9.4.1	Eksakt SER for vilkårlige $M$	49
9.4.2	Noen tilfeller som gir lukket-form resultater	50
9.4.3	BER	50
<b>10</b>	<b>Inkoherent kommunikasjon</b>	<b>53</b>
10.1	SER over gaussiske kanaler	54
10.2	BER over gaussiske kanaler	56
10.3	SER og BER over fading kanaler	56

# 1 Introduksjon

Rapporten er skrevet med to hensikter. Den ene er å samle symbolfeil rater (SER) og bitfeil rater (BER) til de mest vanlige digitalmodulasjoner på et sted. Følgende modulasjoner er studert i rapporten: multiple amplitude modulasjon ( $M$ -AM), multiple phase shift keying ( $M$ -PSK), multiple quadrature modulasjon ( $M$ -QAM) og multiple frequency shift keying ( $M$ -FSK). I tillegg til at både koherent og inkoherent kommunikasjon over gaussiske kanaler blir behandlet, har vi også sett på hvordan en fading kanal påvirker feilratene. Slike feilanalyser er gjort i mange litteraturer, men gjerne med forskjellige notasjoner. Dette gjør det vanskelig for lesere å skifte mellom litteraturer. I denne rapporten er det lagt vekt på at notasjonene er konsekvent brukt, samtidig som å presentere grundig hvordan feilrate uttrykkene er kommet fram.

Der det er mulig presenterer vi også alternative uttrykk for SER og BER. Upper bounds og approksimerte verdier er også tatt med for noen modulasjonsformer. Ligningene er illustrert med figurer.

Den andre hensikt er at rapporten serveres som et forarbeid til det jeg egentlig skal studere, nemlig sårbarhet i kommunikasjonssystemer basert på digitalmodulasjon.

I kapittel 2 blir basisbånd ekvivalent representasjon av passbånd signaler presentert. Denne representasjonen er brukt resten av rapporten til å beskrive passbånd signaler til de forskjellige modulasjoner. Sendte signaler (symboler) blir ofte sett på som bølgeformer. Imidlertid kan de også representeres geometrisk med vektorer. Dette er beskrevet i kapittel 3. Resten av rapporten er delt inn i 2 hovedtemaer: koherent og inkoherent kommunikasjon.

Først blir koherent kommunikasjon analysert. Det startes med beskrivelsen av hvordan en optimal demodulator/detektor fungerer, og den er gitt i kapittel 4. Videre, i kapittel 5, blir sendte signaler til de ulike modulasjoner behandlet i rapporten representert med både bølgeform og vektorer. Gaussisk  $Q$ -funksjon og dens relasjon til error-funksjonen er introdusert i kapittel 6. Analysen av symbolfeil og bitfeil rater over en kanal med additiv hvit gaussisk støy er gitt i kapittel 7. Når vi i tillegg har variasjoner på kanalen trenger vi en statistisk modell for å beskrive denne variasjonen. Fading modellen som er brukt i rapporten sammen med noen nyttige matematiske integraler er beskrevet i kapittel 8, og feilrater over fading kanaler er gitt i kapittel 9.

Videre blir inkoherent kommunikasjon studert i kapittel 10.

## 2 Basisbånd ekvivalente signaler

La passbåndet signal  $s(t)$  være reelt og sentrert rundt senterfrekvens  $f_c$ . La  $s_+(t)$  være signalet med kun positive frekvenser slik at frekvensresponsen av  $s_+(t)$  kan skrives som

$$S_+(f) = 2u(f)S(f) \tag{2.1}$$

hvor  $\star$  representerer foldingsoperator,  $S(f)$  er Fourier transform av  $s(t)$ , og  $u(f)$  er en stepfunksjon. I tidsdomain er

$$\begin{aligned} s_+(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_+(f) \exp(j2\pi ft) df \\ &= \mathcal{F}^{-1} \{2u(f)\} \star \mathcal{F}^{-1} \{S(f)\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

hvor  $\mathcal{F}^{-1} \{S(f)\} = s(t)$  er invers Fourier transform.

Siden  $\mathcal{F}^{-1} \{2u(f)\} = \delta(t) + j/(\pi t)$ , hvor  $\delta(t)$  er en Dirac puls, blir

$$\begin{aligned} s_+(t) &= \left( \delta(t) + \frac{j}{\pi t} \right) \star s(t) \\ &= s(t) + j \frac{1}{\pi t} \star s(t). \end{aligned} \quad (2.3)$$

La  $\hat{s}(t)$  være

$$\hat{s}(t) = \frac{1}{\pi t} \star s(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad (2.4)$$

og den kan betraktes som en filtrert versjon av  $s(t)$  med filteret  $h(t) = 1/(\pi t)$ ,  $-\infty \leq t \leq \infty$ . Dette filteret er Hilbert transformen og den har følgende frekvensrespons

$$\begin{aligned} H(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-j2\pi ft) dt \\ &= \begin{cases} -j, & f > 0 \\ 0, & f = 0 \\ j, & f < 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Siden amplituderresponsen er 1, er dette filteret en faseskifter som skifter fasen til innkommende signal med  $\pm 90^\circ$  for henholdsvis negative og positive frekvenser.

Signal  $s_+(t)$  er i passbåndet. Et ekvivalent basisbånd signal  $s_l(t)$  kan fås ved å skifte  $S_+(f)$  ned til basisbånd. Det vil si  $S_l(f) = S_+(f + f_c)$ . I tidsplanet kan det skrives som

$$\begin{aligned} s_l(t) &= s_+(t) \exp(-j2\pi f_c t) \\ &= (s(t) + j\hat{s}(t)) \exp(-j2\pi f_c t). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Den er ekvivalent med

$$s(t) + j\hat{s}(t) = s_l(t) \exp(-j2\pi f_c t) \quad (2.7)$$

hvor  $s_l(t)$  generelt er kompleks.

La  $s_l(t) = x(t) + jy(t)$ , kan  $s(t)$  skrives på følgende måter:

$$s(t) = \Re\{(x(t) + jy(t)) \exp(-j2\pi f_c t)\} \quad (2.8a)$$

$$= x(t) \cos(2\pi f_c t) - y(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (2.8b)$$

$$= a(t) \cos(2\pi f_c t + \theta(t)) \quad (2.8c)$$



hvor  $a(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$  og  $\theta(t) = \tan^{-1}(y(t)/x(t))$ .

Videre er energien i signal  $s(t)$  er definert ved

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\Re\{s_l(t) \exp(j2\pi f_c t)\}]^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |s_l(t)|^2 \cos^2(2\pi f_c t + \theta) dt\end{aligned}\tag{2.9}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |s_l(t)|^2 dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |s_l(t)|^2 \cos(4\pi f_c t + 2\theta(t)) dt.\tag{2.10}$$

For å oppnå ovennevnte uttrykk har vi brukt  $\Re\{x\} = (x + x^*)/2$ . Videre ser vi at  $|s_l(t)|$  varierer langsomt sammenlignet med cosinusfunksjonen med høy frekvens. Dermed er siste integralet (netto arealet under kurven) veldig lite og kan dermed sees bort ifra. Det medfører at energien i det sendte signalet blir

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |s_l(t)|^2 dt.\tag{2.11}$$

### 3 Signalrom og vektorrom konsept

Vi skal presentere relasjonen mellom bølgeform signal (symbol) og vektorrom representasjon i dette avsnittet. La oss anta at informasjon fra en kilde er blitt gjort om til bølgeformer (symboler) basert på et sett med alfabeter  $S_1(t), S_2(t), \dots, S_M(t)$ . Hvert symbol i alfabetet har en varighet  $T_s$  og energien i hvert symbol er endelig gitt av  $\mathcal{E}_s = \int_0^{T_s} S_m^2(t) dt$ . Vi kan da approksimere  $S_m$  med lineær kombinasjonen

$$\hat{S}_m(t) = \sum_{k=1}^K a_{mk} \varphi_k(t)\tag{3.1}$$

med  $K \leq M$ , hvor  $\{\varphi_k\}_{k=1}^K$  oppfyller

$$\int_0^{T_s} \varphi_k(t) \varphi_l(t) dt = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 1, & k = l \end{cases}\tag{3.2}$$

er settet med ortonormale funksjoner som spenner signalrommet. Videre er approksimasjonsfeil  $e(t) = S_m(t) - \hat{S}_m(t)$  slik at energi i approksimasjonsfeil blir

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_e &= \int_0^{T_s} (S_m(t) - \hat{S}_m(t))^2 dt \\ &= \int_0^{T_s} \left( S_m(t) - \sum_{k=1}^K a_{mk} \varphi_k(t) \right)^2 dt.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Ligningen over er et mean-square-error problem, og fra estimeringsteori vet vi at minst  $\mathcal{E}_e$  oppnås når feilen er ortogonal med hver av de ortonormale funksjonene i (3.1). Dermed får vi

$$\int_0^{T_s} e(t)\varphi_k dt = \int_0^{T_s} \left( S_m(t) - \sum_{k=1}^K a_{mk}\varphi_k(t) \right) \varphi_n(t) dt = 0, \quad n = 1, 2, \dots, K, \quad (3.4)$$

og dette reduseres til at

$$a_{mn} = \int_0^{T_s} S_m(t)\varphi_n(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots, K. \quad (3.5)$$

Også fra estimeringsteori vet vi at

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\min} &= \int_0^{T_s} e(t)S_m(t) dt \\ &= \int_0^{T_s} S_m^2(t) dt - \int_0^{T_s} \sum_{k=1}^K a_{mk}\varphi_k(t)S_m(t) dt \\ &= \mathcal{E}_s - \sum_{k=1}^K a_{mk}^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Siden denne kan ikke være negativ, og når  $\mathcal{E}_{\min}$  er minst, dvs.  $\mathcal{E}_{\min} = 0$ , får vi  $\mathcal{E}_s = \sum_{k=1}^K a_{mk}^2 = \int_0^{T_s} S_m^2(t) dt$  og  $S_m(t)$  kan uttrykkes eksakt med

$$S_m(t) = \sum_{k=1}^K a_{mk}\varphi_k(t) = \mathbf{a}_m^T \boldsymbol{\varphi}, \quad (3.7)$$

hvor  $[\cdot]^T$  er vektortransponering, og  $\mathbf{a}_m$  og  $\boldsymbol{\varphi}$  er  $K$ -dimensjonal vektorer gitt ved

$$\mathbf{a}_m = [a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mK}]^T \quad (3.8a)$$

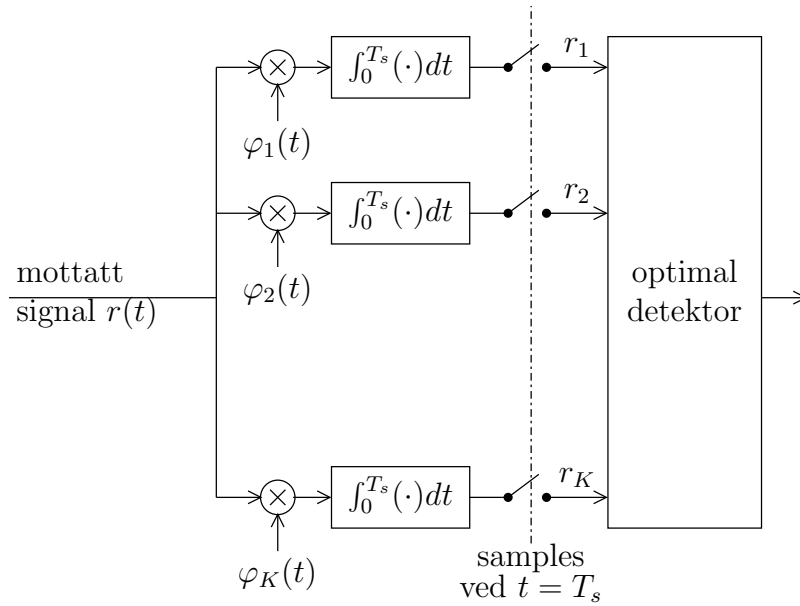
$$\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_K(t)]^T. \quad (3.8b)$$

## 4 Optimal detektor

Optimal demodulasjon kan gjøres med enten matched-filtre eller korrelatorer. Figur 4.1 illustrerer hvordan en optimal demodulator opereres. Det kan vises at både korrelasjon-basert demodulator og matched-filtrering demodulator vil produsere vektor  $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_K]^T$  som inneholder nødvendig/relevant informasjon i mottatt signal for deteksjon. Her står  $K$  for antall korrelatorer eller antall matched-filtre som blir brukt. Med andre ord,  $K$  er dimensjonen til en symbolvektor. Et BPSK symbol har dimensjon 1 siden den vil ligge på en linje, mens et PSK symbol ligger på et plan og må beskrives ved hjelp av en vektor med to elementer. Dermed har den dimensjon 2.

Når  $S_m(t)$  sendes, blir mottatt signal

$$r(t) = S_m(t) + n(t). \quad (4.1)$$



Figur 4.1: Optimal detektor ved koherent deteksjon.

La oss anta at demodulasjon utføres med et sett med korrelatorer og samples ved tid  $t = T_s$  som vises i Figur 4.1. Da blir

$$r_k = \int_0^{T_s} r(t)\varphi_k(t)dt = a_{mk} + n_k, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (4.2)$$

hvor  $a_{mk}$  er som i (3.5) og

$$n_k = \int_0^{T_s} n(t)\varphi_k(t)dt$$

er støykomponentene i det mottatte signalet.

Med vektorer kan (4.2) skrives som

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}_m + \mathbf{n} \quad (4.3)$$

hvor  $\mathbf{n} = [n_1, n_2, \dots, n_K]^T$ .

Vi vil i dette avsnittet finne en optimal detektor som bestemmer hvilket symbol som ble sendt basert på vektor  $\mathbf{r}$  slik at sannsynlighet for riktig deteksjon blir størst mulig. Vi antar at symbolene er uavhengige av hverandre (dvs. en minneløs kilde).

Det er velkjent at *maximum likelihood* (ML) deteksjon er det samme som *maximum a posteriori* (MAP) deteksjon så lenge symbolene er like sannsynlige. Etter demodulasjon er  $P(S_m|\mathbf{r}) = P(\mathbf{a}_m|\mathbf{r})$  siden  $\varphi_k$  er gitt og er ortonormale, og ved hjelp av Bayes' regel får vi:

$$P(S_m|\mathbf{r}) = P(\mathbf{a}_m|\mathbf{r}) = \frac{p(\mathbf{r}|\mathbf{a}_m)P(\mathbf{a}_m)}{p(\mathbf{r})}, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (4.4)$$

hvor  $p(\mathbf{r}|\mathbf{a}_m)$  er betinget sannsynlighet tetthetsfunksjon (PDF) av mottatt vektor  $\mathbf{r}$  gitt at vektoren med koeffisienter  $\mathbf{a}_m$  ble sendt, og  $P(\mathbf{a}_m)$  er sannsynlighet at symbolet assosiert med  $S_m(t)$  blir

sendt. Når symbolsannsynlighetene er like, vil  $P(\mathbf{a}_m)$  være en konstant. Videre er  $p(\mathbf{r})$  uavhengig av hva slags signal som ble sendt. Dermed vil en detektor basert på å finne det signalet som maksimerer a posteriori sannsynlighet  $p(\mathbf{a}_m|\mathbf{r})$  være ekvivalent med det som maksimerer likelihood sannsynlighet  $p(\mathbf{r}|\mathbf{a}_m)$ .

På en gaussisk kanal vil det være slik at maximum av  $p(\mathbf{r}|\mathbf{a}_m)$  over  $\mathbf{a}_m$  oppnås når denne avstandsmetrikken

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{a}_m) = \sum_{k=1}^K (r_k - a_{mk})^2 = \|\mathbf{r} - \mathbf{a}_m\|^2 \quad (4.5)$$

har nådd sitt minimum. Denne metrikken er kjent som likelihood funksjon til gaussisk PDF (naturlig logaritmen til  $p(\mathbf{r}|\mathbf{a}_m)$ ) hvor ledd som ikke er avhengig av  $\mathbf{a}_m$  er fjernet. Det vil si at ML deteksjonsregel er den som velge symbolet  $\mathbf{a}_m$  som ligger nærmest mottatt vektor  $\mathbf{r}$ . Skriver vi ut ligning (4.5) får vi

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{a}_m) = \|\mathbf{r}\|^2 - 2\mathbf{r}^T \mathbf{a}_m + \|\mathbf{a}_m\|^2. \quad (4.6)$$

Siden  $\|\mathbf{r}\|^2$  er den samme for alle metrikker, kan den utelukkes fra metrikken. Vi kaller den resulterende avstandsmetrikken for  $D'(\mathbf{r}, \mathbf{a}_m) = -2\mathbf{r}^T \mathbf{a}_m + \|\mathbf{a}_m\|^2$ . La oss nå definere

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{a}_m) = 2\mathbf{r}^T \mathbf{a}_m - \|\mathbf{a}_m\|^2 = -D'(\mathbf{r}, \mathbf{a}_m) \quad (4.7)$$

slik at minimering av  $D'(\mathbf{r}, \mathbf{a}_m)$  eller  $D(\mathbf{r}, \mathbf{a}_m)$  vil være ekvivalent med maksimering av  $C(\mathbf{r}, \mathbf{a}_m)$ . Fra (4.7) kan følgende observasjoner trekkes fram. Først ser vi at  $\mathbf{r}^T \mathbf{a}_m$  er projeksjonen av mottatt signal vektor  $\mathbf{r}$  på hver av de mulige  $M$  sendte signaler (altså  $\mathbf{a}_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ ). Her måles korrelasjonen mellom mottatt vektor og det  $m$ 'te symbolet. Dette impliserer at desisjonen blir det symbolet som har størst korrelasjon med mottatt signal. Denne metrikken blir ofte kalt for korrelasjonsmetrikk. Videre,  $\|\mathbf{a}_m\|^2$  kan sees som en slags kompensasjon for signalsymboler med ulik energi (som for eksempel  $M$ -AM eller  $M$ -QAM signaler). Hvis alle symboler har samme energi (som  $M$ -PSK eller  $M$ -FSK signaler), kan dette leddet fjernes fra metrikken uten at det påvirker desisjonen.

## 5 Representasjon av digitalmodulerte signaler - Koherent kommunikasjon

Generelt har bæreølgen en fase. En eksempel på en bæreølge kan være  $\cos(2\pi ft + \theta_c)$ , hvor  $\theta_c$  er fasen. Siden vi behandler koherent kommunikasjon i dette avsnittet blir denne fasen sett bort ifra siden systemet er i stand til å estimere denne. Med andre ord kan  $\theta_c$  settes til null uten at det påvirker analysen.

## 5.1 M-AM

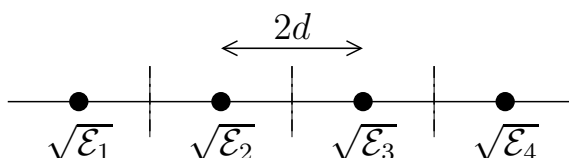
Med denne modulasjonstypen ligger selve informasjonsdata i amplituden til bærebølgen. Et sendt signal i ekvivalent basisbånd ser typisk ut som

$$S_m(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_m}{T_s}} \cos(2\pi f_c t), & 0 \leq t \leq T_s \\ 0, & \text{ellers} \end{cases} \quad (5.1)$$

for  $m = 1, 2, \dots, M$ . Med vektorrom representasjon i (3.7) er vektoren  $\varphi$  en en-dimensjonal vektor med bølgeformen  $\varphi_1 = \sqrt{2/T_s} \cos(2\pi f_c t)$ , og  $\mathbf{a}_m$  har kun et element  $a_{m1}$

$$a_{m1} = \int_0^{T_s} \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_m}{T_s}} \cos(2\pi f_c t) \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos(2\pi f_c t) dt = \sqrt{\mathcal{E}_m}. \quad (5.2)$$

Det er viktig å huske at ligningen over ikke gjelder eksakt, men den er en veldig god approksimasjon for  $f_c T_s \gg 1$ . Grunnen til det kan sees i overgangen mellom ligningene (2.9)–(2.11).



Figur 5.1: Plassering av AM symboler og deteksjonsgrensene.

Illustrasjon av hvordan symbolene er plassert er tegnet i Figur 5.1. Her ser vi at amplituden  $\sqrt{\mathcal{E}_m}$  kan ha verdier

$$\sqrt{\mathcal{E}_m} = (2m - 1 - M)d, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (5.3)$$

hvor  $2d$  er den minste avstanden mellom 2 nærliggende amplituder.

## 5.2 M-PSK

Her ligger datainformasjon i fasen til bærebølgen. I dette tilfellet har alle modulerte symboler samme energi  $\mathcal{E}$  slik at et symbol kan beskrives med

$$S_m(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{T_s}} \cos\left(2\pi f_c t + \frac{2\pi(m-1)}{M}\right), & 0 \leq t \leq T_s \\ 0, & \text{ellers} \end{cases} \quad (5.4)$$

for  $m = 1, 2, \dots, M$ . Siden  $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$  kan  $S_m(t)$  skrives som

$$S_m(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{T_s}} \cos(2\pi f_c t) \cos\left(\frac{2\pi(m-1)}{M}\right) - \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{T_s}} \sin(2\pi f_c t) \sin\left(\frac{2\pi(m-1)}{M}\right).$$

Med vektorrepresentasjon er  $S_m(t) = \mathbf{a}_m^T \boldsymbol{\varphi}$  hvor

$$\mathbf{a}_m = \left[ \sqrt{\mathcal{E}} \cos\left(\frac{2\pi(m-1)}{M}\right), -\sqrt{\mathcal{E}} \sin\left(\frac{2\pi(m-1)}{M}\right) \right]^T \quad (5.5a)$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \left[ \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos(2\pi f_c t), \sqrt{\frac{2}{T_s}} \sin(2\pi f_c t) \right]^T. \quad (5.5b)$$

### 5.3 M-QAM

Med denne modulasjonstypen ligger informasjonen i både amplitude og fase til bærebølgen. Den kan også sees som en kompleks-amplitude modulasjon eller en kombinasjon av amplitude- og fasemodulasjon. Et typisk signalsymbol ser ut som

$$S_m(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_m}{T_s}} \cos(2\pi f_c t + \theta_m), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{ellers} \end{cases} \quad (5.6)$$

for  $m = 1, 2, \dots, M$ .

Noen ganger er det foretrukket å uttrykke  $S_m(t)$  på følgende måte:

$$S_m(t) = \Re \left\{ \left( \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_{m\Re}}{T_s}} + j \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_{m\Im}}{T_s}} \right) \exp(j2\pi f_c t) \right\} \quad (5.7)$$

$$= \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_{m\Re}}{T_s}} \cos(2\pi f_c t) - \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_{m\Im}}{T_s}} \sin(2\pi f_c t) \quad (5.8)$$

hvor  $\mathcal{E}_{m\Re}$  og  $\mathcal{E}_{m\Im}$  henholdsvis er energi i ifase- og kvadraturkomponentene (forkortes med I- og Q-komponent), og  $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m\Re} + \mathcal{E}_{m\Im}$  er energi per symbol.

Med

$$\mathbf{a}_m = \left[ \sqrt{\mathcal{E}_{m\Re}}, -\sqrt{\mathcal{E}_{m\Im}} \right]^T \quad (5.9a)$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \left[ \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos(2\pi f_c t), \sqrt{\frac{2}{T_s}} \sin(2\pi f_c t) \right]^T \quad (5.9b)$$

kan  $S_m(t) = \mathbf{a}_m^T \boldsymbol{\varphi}$ .

### 5.4 M-FSK

Denne modulasjonstypen baserer seg på at informasjonen blir kodet som frekvensendringer på bærebølgen. Hvis vi antar at symbolene har lik energi  $\mathcal{E}$ , kan vi skrive et typisk modulert symbol som

$$S_m(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{T_s}} \cos(2\pi(f_c + m\Delta f)t), & 0 \leq t \leq T_s \\ 0, & \text{ellers} \end{cases} \quad (5.10)$$

for  $m = 1, 2, \dots, M$ . La  $\cos(2\pi(f_c + m\Delta f)t) = \cos(2\pi f_m t)$  slik at vi kan skrive  $S_m(t)$  som i ligning (3.7), hvor elementene i vektor  $\varphi$  er

$$\varphi_k(t) = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos(2\pi f_m t), \quad k = 1, 2, \dots, K = M. \quad (5.11)$$

Elementene i vektor  $\mathbf{a}_m$  blir

$$\begin{aligned} a_{mk} &= \int_0^{T_s} \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{T_s}} \cos(2\pi f_m t) \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos(2\pi f_k t) dt \\ &= \begin{cases} \sqrt{\mathcal{E}}, & \text{når } m = k \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Det vil si at vektorene  $\mathbf{a}_m$  er ortogonale.<sup>1</sup> Det kan lett vises at avstanden mellom symbolene  $S_m(t)$  (eller vektorene  $\mathbf{a}_m$ ) er like og er gitt av  $d_{\min} = \sqrt{2\mathcal{E}}$ .

## 6 Gaussisk $Q$ -funksjon og error-funksjon

Før vi kan analysere SER og BER for de ulike modulasjoner er det nødvendig å introdusere noen matematiske funksjoner som ofte vil bli brukt seinere i rapporten.

Når man analyserer feilrater kan man ikke unngå å møte error-funksjonen (erf) eller gaussisk  $Q$ -funksjonen. Vi vil derfor introdusere 2 måter å skrive  $Q$ -funksjonen på, samt relasjonen den har med error-funksjonen.

### 6.1 Gaussisk $Q$ -funksjon

I et en-dimensjonalt tilfelle er  $Q$ -funksjonen definert ved

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy. \quad (6.1)$$

Dette er integralet av en normalisert gaussisk sannsynlighet tetthetsfunksjon (PDF) over intervallet  $[x, \infty)$ . Denne har to svakheter. Den viktigste er øvre grensen av integralet, som oftest må trunkeres ved numerisk integrasjon. Den andre svakheten er at argumentet til  $Q$ -funksjonen er nedregrensen av integralet.

For gaussiske kanaler vil ikke den sistnevnte svakheten spille noen rolle, mens trunkering av øvre grensen til et endelig tall svarer til unøyaktighet i beregningen når numerisk integrasjon må anvendes. Imidlertid, for eksempel en multipath fading kanal, vil den sistnevnte svakheten gjøre analytisk beregning vesentlig vanskeligere siden argumentet til  $Q$ -funksjonen—som er nedregrense

<sup>1</sup>De er ortogonale kun når frekvensseparasjon  $\Delta f$  oppfyller et visst krav. I koherent kommunikasjon må  $\Delta f = 1/(2T_s)$ , mens  $\Delta f$  må være  $1/T_s$  ved inkoherent kommunikasjon [11].

av integralet—er avhengig av amplitudevariasjonen til de forskjellige komponenter i det mottatte signalet.

Det er derfor ønskelig at  $Q$ -funksjonen kan uttrykkes på en annen måte ved hjelp av elementære funksjoner hvor begge svakhetene kan unngås. Det kan vises at for  $x \geq 0$  kan  $Q(x)$  i (6.1) skrives som [13]

$$Q(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sin^2\theta}\right) d\theta. \quad (6.2)$$

## 6.2 Error-funksjon

Den er definert ved

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-y^2) dy, \quad (6.3)$$

slik at den komplementære error-funksjonen—betegnes ved  $\operatorname{erfc}(x)$ —skrives som

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-y^2) dy. \quad (6.4)$$

## 6.3 Relasjon mellom $Q$ - og error-funksjonen

Sammenligner man (6.1) og (6.4) ser vi at de to er relatert med hverandre på følgende måte:

$$Q(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right). \quad (6.5)$$

# 7 Analysen av feilrater over gaussiske kanaler - Koherent kommunikasjon

Før vi går videre og analyserer feilrater for ulike modulasjonstyper, er det viktig å påpeke at, i koherent kommunikasjon, en feil oppstår når  $S_m(t)$  var sendt mens mottatt signal ikke havner på området som er assosiert med symbolet  $S_m(t)$ . La  $R_m$  være det området og la  $r$  være mottatt signal. Når vi antar at symbolene er like sannsynlige, blir feilsannsynlighet:

$$\begin{aligned} P(E) &= \sum_{m=1}^M P(S_m \text{ var sendt}) P(r \text{ ikke i } R_m | S_m \text{ var sendt}) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M P(r \text{ ikke i } R_m | S_m \text{ var sendt}). \end{aligned} \quad (7.1)$$



## 7.1 M-AM

### 7.1.1 SER

Ut fra (4.1) og (5.2) ser vi at

$$r_m = \sqrt{\mathcal{E}_m} + n. \quad (7.2)$$

$r_m$  er da en gaussisk stokastisk variabel med middelværdi lik  $\sqrt{\mathcal{E}_m}$  og varians lik  $N_0/2$ .

Videre ser vi fra Figur 5.1 at et symbol er feil detektert hvis absoluttverdien av støyen er større enn halvparten av den minste avstanden mellom 2 nærliggende symboler. Da blir symbolet detektert som en av de to nabosymbolene. Imidlertid vil feilraten til de to symbolene på hver ende av aksene være halvert siden der er det kun ett nabosymbol. Matematisk kan gjennomsnittlig SER skrives som

$$\begin{aligned} \text{SER}_{M\text{-AM}} &= P(S_1)P(E|S_1) + P(S_2)P(E|S_2) + \dots + P(S_M)P(E|S_{M-1}) \\ &= \frac{1}{M} \frac{P(E|S_1)}{2} + \frac{1}{M} P(E|S_2) + \dots + \frac{1}{M} P(E|S_{M-1}) + \frac{1}{M} \frac{P(E|S_M)}{2} \\ &= \frac{M-1}{M} P(E|S_m) \end{aligned} \quad (7.3)$$

hvor  $P(S_m)$  representerer sannsynligheten for at symbolet  $S_m$  blir sendt, og  $P(E|S_m)$  er sannsynlighet for feil gitt at  $S_m$  var sendt. Videre har vi

$$\begin{aligned} P(E|S_m) &= P(|r - S_m| > d) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi N_0}} \int_d^\infty e^{-x^2/N_0} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2d^2/N_0}}^\infty e^{-v^2/2} dv \\ &= 2Q\left(\sqrt{\frac{2d^2}{N_0}}\right). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Videre antar vi at sender opererer med begrenset gjennomsnitteffekt på  $\mathcal{E}_s/T_s$  (watts) per symbol. Det medfører

$$\frac{\mathcal{E}_s}{T_s} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{\mathcal{E}_m}{T_s} = \frac{d^2}{MT_s} \sum_{m=1}^M (2m-1) = \frac{d^2}{3T_s} (M^2 - 1). \quad (7.5)$$

Løser vi resultatet med hensyn på  $d$  og setter inn i (7.4) får vi  $P(E|S_m) = 2Q\left(\sqrt{6\mathcal{E}_s/(N_0(M^2 - 1))}\right)$ . Gjennomsnittlig SER blir derfor

$$\text{SER}_{M\text{-AM}} = 2 \frac{M-1}{M} Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} \frac{6k}{M^2 - 1}}\right), \quad (7.6)$$

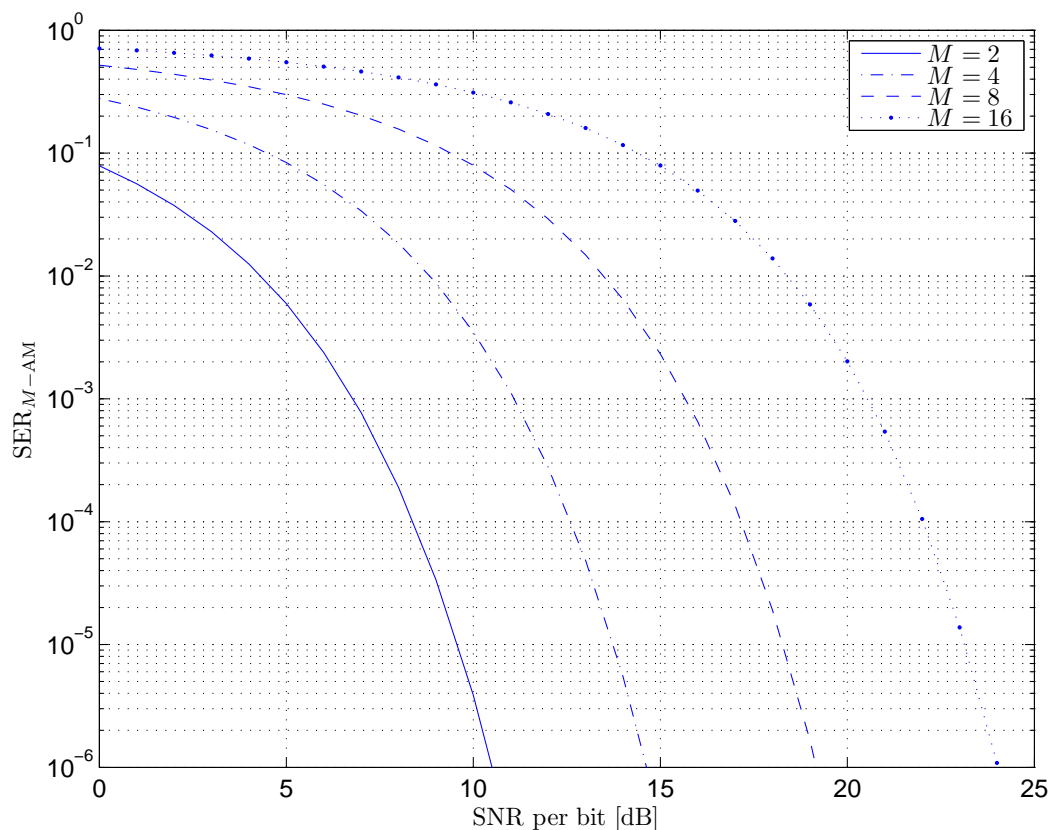
hvor  $k = \log_2 M$  er antall bit per symbol og  $\mathcal{E}_b = \mathcal{E}_m/k$  er midlere energi per bit.<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Når symbolene har lik energi blir  $\mathcal{E}_b = \mathcal{E}/k$ .

Når  $M = 2$  har vi et binært signal. Da er energi per symbol ( $\mathcal{E}_m$ ) lik energi per bit ( $\mathcal{E}_b$ ), siden det er 1 bit per symbol. Det generelle SER uttrykket reduseres til

$$\text{SER}_{2\text{-AM}} = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right). \quad (7.7)$$

Figur 7.1 viser eksakt SER for forskjellige verdier av  $M$  som funksjon av signal-til-støy forhold (SNR) per bit ( $\mathcal{E}_b/N_0$ ).



Figur 7.1: Sannsynlighet for symbolfeil for  $M$ -AM (ligning (7.6)).

### Alternativ representasjon av SER

Basert på (6.2) kan SER uttrykkene henholdsvis skrives som

$$\text{SER}_{M\text{-AM}} = \frac{2}{\pi} \frac{M-1}{M} \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} \frac{3k}{(M^2-1)\sin^2\theta}\right) d\theta, \quad (7.8)$$

og

$$\text{SER}_{2\text{-AM}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} \frac{1}{\sin^2\theta}\right) d\theta. \quad (7.9)$$

## 7.1.2 Bitfeil rate (BER)

Istedet for å måle SER kan man måle BER. For å kunne gjøre dette man må konvertere symbolene til bit. Hvordan man gjør det er avhengig av hvilken algoritme som var brukt hos senderen til å mappe bitene til et symbol. Graykoding er ofte brukt og er kjent for å ha ett bit i forskjell mellom to nærliggende symboler, som igjen betyr at det kun er 1 bitfeil hvis et nabosymbol blir detektert som sendte symbolet.

BER for  $M$ -AM er gitt som følgende [2]:

$$\text{BER}_{M\text{-AM}} = \frac{2}{\log_2 M} \sum_{n=1}^{\log_2 M} \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{(1-2^{-n})M-1} (-1)^{\lfloor (i2^{n-1})/M \rfloor} \left( 2^{n-1} - \left\lfloor \frac{i2^{n-1}}{M} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right) \times Q \left( (2i+1) \sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} \frac{6k}{M^2-1}} \right) \quad (7.10)$$

hvor  $\lfloor x \rfloor$  er det største heltall som er mindre enn  $x$ . Dvs. den heltallig delen av  $x$ .

Ved høye SNR det er det ofte antatt kun 1 bitfeil, dvs. et av de nærmeste nabosymbolene er detektert som riktig symbol. Da gjelder følgende approksimasjonen

$$\text{BER}_{M\text{-AM}} \approx \frac{\text{SER}_{M\text{-AM}}}{k}. \quad (7.11)$$

Det er verdt å nevne at når  $M = 2$  så er (7.11) identisk med (7.7) slik at (7.11) blir et eksakt BER uttrykk. Videre er (7.10) identisk med (7.7) når  $M = 2$ . Dette er bekreftet ved sammenligning av Figurene 7.1 og 7.2. Det er også plottet BER for andre verdier av  $M$  i Figur 7.2.

## 7.2 $M$ -PSK

### 7.2.1 SER

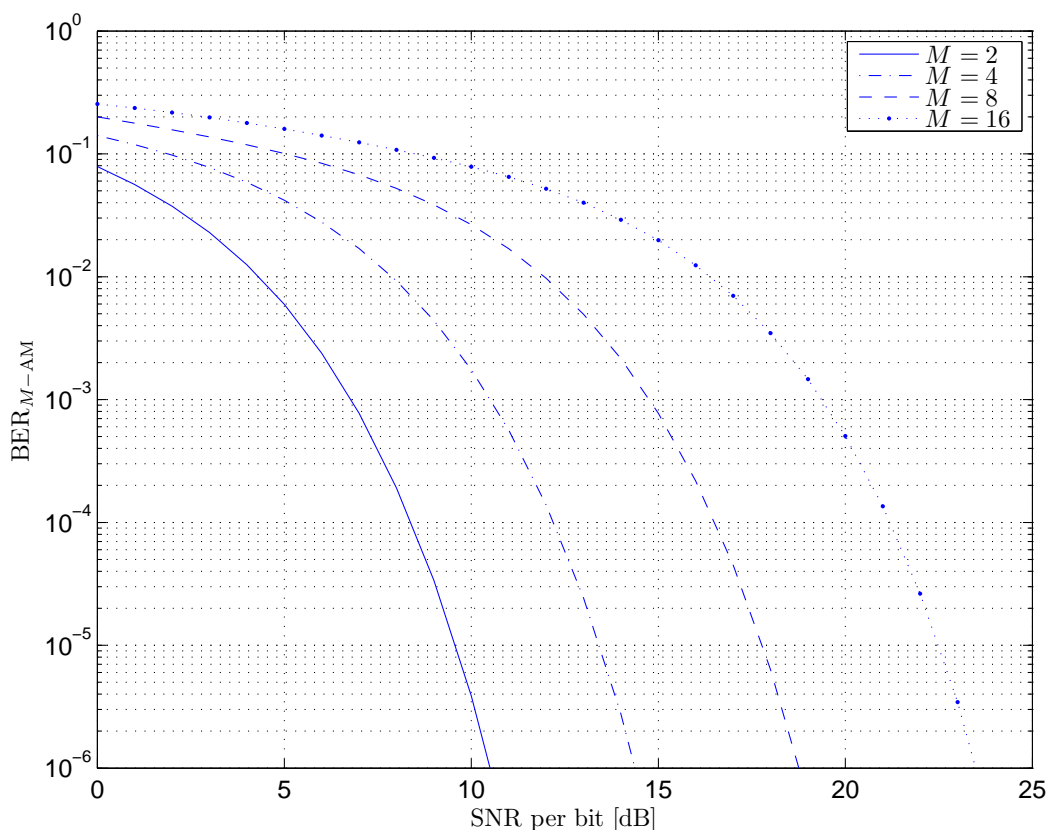
La  $\theta_m = 2\pi(m-1)/M$ , og ut fra (4.1), (4.3) og (5.5) får vi at signalpunktet  $\mathbf{r}$  har 2 koordinater:

$$r_1 = \int_0^{T_s} r(t) \varphi_1(t) dt = \sqrt{\mathcal{E}} \cos(\theta_m) + n_1 \quad (7.12a)$$

$$r_2 = \int_0^{T_s} r(t) \varphi_2(t) dt = -\sqrt{\mathcal{E}} \sin(\theta_m) + n_2 \quad (7.12b)$$

Optimal detektor for AWGN kanaler er den som projiserer mottatt vektor  $\mathbf{r} = [r_1, r_2]^T$  på hver av de mulige  $M$  signalvektorer og velger den som har størst korrelasjon med  $\mathbf{r}$ . Siden alle  $M$ -PSK symboler har likt energi, vil en optimal detektor kalkulere korrelasjonsmetrikken

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{a}_m) = \mathbf{r}^T \mathbf{a}_m, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (7.13)$$



Figur 7.2: Sannsynlighet for bitfeil for  $M$ -AM (ligning (7.10)).

og velge signalvektoren  $\mathbf{a}_m$  som ligger nærmest  $\mathbf{r}$  i fasen.

Fasen til mottatt vektor  $\mathbf{r}$  er  $\Theta_r = \tan^{-1} \frac{r_2}{r_1}$ . For å finne feilsannsynlighet, er vi nødt til å finne PDF av  $\Theta_r$  først, for så å bruke den til å regne SER. Uten å miste generalitet la oss nå anta at  $S_1(t)$ —dvs. signalvektor  $\mathbf{a}_1 = [\sqrt{\mathcal{E}}, 0]^T$  ble sendt. Dette er symbolet modulert på fasen  $\theta_1 = 0$ . Mottatt vektor blir da  $\mathbf{r} = [\sqrt{\mathcal{E}} + n_1, n_2]^T$ , hvor  $n_k, k = 1, 2$  er additiv støy med null i middel og varians lik  $N_0/2$ . Siden  $n_k$  er gaussisk-fordelt stokastiske variable, er simultanfordeling til  $r_1$  og  $r_2$  også gaussisk med  $E[r_1] = \sqrt{\mathcal{E}}, E[r_2] = 0$  og  $\sigma_{r_1}^2 = \sigma_{r_2}^2 = N_0/2 = \sigma_r^2$ . Sannsynlighetstetthetsfunksjonen blir

$$p(r_1, r_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_r^2} \exp\left(-\frac{(r_1 - \sqrt{\mathcal{E}})^2 + r_2^2}{2\sigma_r^2}\right). \quad (7.14)$$

Ved variabelskifting med

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \\ \Theta_r &= \tan^{-1} \frac{r_2}{r_1} \end{aligned}$$

får vi [11]

$$p(R, \Theta_r) = \frac{R}{2\pi\sigma_r^2} \exp\left(-\frac{R^2 + \mathcal{E} - 2R\sqrt{\mathcal{E}} \cos \Theta_r}{2\sigma_r^2}\right), \quad 0 \leq \Theta_r \leq 2\pi, 0 \leq R \leq \infty. \quad (7.15)$$

Med enda en transformasjon av variabel med  $r = R/(2\sigma_r^2) = R/\sqrt{N_0}$ , og integrerer vi over  $r$  får vi

$$\begin{aligned} p(\Theta_r) &= \int_0^\infty \frac{r}{\pi} \exp\left(-\left(r^2 - 2r\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{N_0}} \cos \Theta_r + \frac{\mathcal{E}}{N_0}\right)\right) dr \\ &= \int_0^\infty \frac{r}{\pi} \exp\left(-\left(r^2 - 2r\sqrt{k}\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}} \cos \Theta_r + k\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}\right)\right) dr. \end{aligned}$$

Sannsynlighet for å gjøre en riktig deteksjon av symbolet  $\mathbf{a}_1$  (dvs. signalet  $S_1(t)$ ) vil være integralet av  $p(\Theta_r)$  over intervallet  $(-\pi/M, \pi/M)$  slik at sannsynlighet for feil deteksjon blir [12]

$$\begin{aligned} \text{SER}_{M\text{-PSK}} &= 1 - \int_{-\pi/M}^{\pi/M} p(\Theta_r) d\Theta_r \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\left[u - \sqrt{k\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}\right]^2\right) \left[ \int_0^{u \tan(\pi/M)} \exp(-v^2) dv \right] du \quad (7.16) \end{aligned}$$

### Alternativ representasjon

Ved hjelp av gaussiske  $Q$ -funksjoner kan SER i (7.16) skrives som [13]

$$\text{SER}_{M\text{-PSK}} = Q\left(\sqrt{2k\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}\right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp\left(-\left(u - \sqrt{k\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}\right)^2\right) Q\left(u\sqrt{2} \tan \frac{\pi}{M}\right) du. \quad (7.17)$$

Fra (7.17) kan man lett se at når  $M = 2$  (dvs.  $k = 1$ ) så er SER redusert til

$$\text{SER}_{2\text{-PSK}} = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right), \quad (7.18)$$

siden  $Q(\infty) = 0$  (se ligning (6.1)) slik at integralet i (7.17) blir null. Dette stemmer overens med resultatet for binær AM i (7.7).

Når  $M = 4$  har vi en kombinasjon av to binære PSK signaler. Da kan SER enkelt beregnes med

$$\begin{aligned} \text{SER}_{4\text{-PSK}} &= 1 - (\text{sannsynlighet for korrekt deteksjon}) \\ &= 1 - (1 - \text{SER}_{2\text{-PSK}})^2 \\ &= 2Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right) - Q^2\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right). \quad (7.19) \end{aligned}$$

Vi ser at både (7.16) og (7.17) er på lukket-form, men begge inneholder et integral hvor øvre grensen er uendelig. Uendelighet må trunkeres til et endelig verdi ved numerisk beregning, noe som gir opphav til unøyaktighet eller krever høy kompleksitet. Videre er det vist i [12, 4] at SER kan skrives som

$$\text{SER}_{M\text{-PSK}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{(M-1)\pi/M} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} \frac{k \sin^2(\pi/M)}{\sin^2 \theta}\right) d\theta. \quad (7.20)$$

Det er tydelig at evalueringen er mye enklere med (7.20) enn med (7.16) eller (7.17), siden (7.20) er et endelig integral hvor integranden kun inneholder elementære funksjoner og er på eksponensiell form.

## 7.2.2 “Bounds” på SER for MPSK signaler

Generelt har vi sett at beregningen av SER for  $M$ -PSK signaler krever å løse integraler, bortsett fra to spesielle tilfeller når  $M = 2$  og  $M = 4$ . Derfor er det nyttig å ha “upper-bounds” på enklere lukket-form slik at estimert SER raskt kan beregnes. Vi har følgende bounds [13]:

Exponensielt bound:

$$\text{SER}_{M\text{-PSK}} \leq \frac{M-1}{M} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} k \sin^2 \frac{\pi}{M}\right). \quad (7.21)$$

Union bound:

Dette går ut fra at hvis  $E_m$  er hendelsen hvor for eksempel  $C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) > C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_1)$  for  $m \neq 1$ , så gjelder følgende

$$P(\cup_{m=1}^n E_m) \leq \sum_{m=1}^n P(E_m), \quad (7.22)$$

hvor  $P(E_m)$  er sannsynlighet for at hendelsen  $E_m$  oppstår. Dermed kan SER upper bounded med

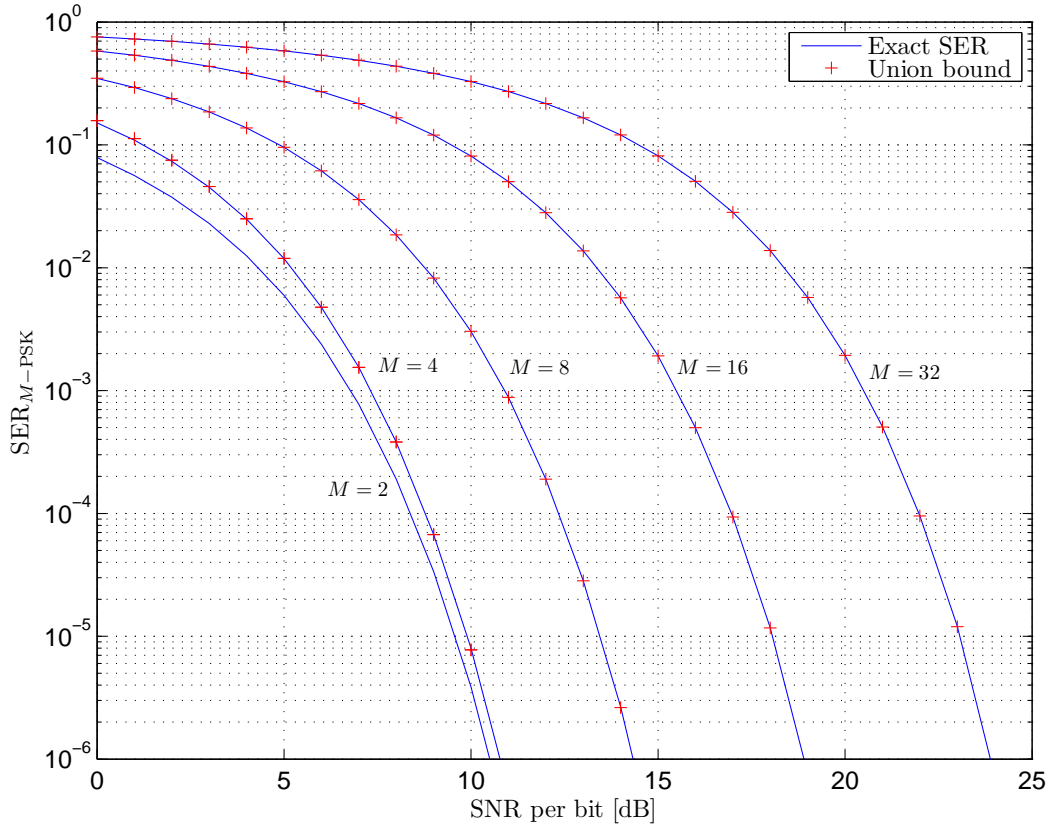
$$\text{SER}_{M\text{-PSK}} \leq 2Q\left(\sqrt{2k \frac{\mathcal{E}_b}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M}\right). \quad (7.23)$$

Union-Chernoff bound:

$$\text{SER}_{M\text{-PSK}} \leq \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} k \sin^2 \frac{\pi}{M}\right). \quad (7.24)$$

Figur 7.3 viser eksakt og union bound av SER for  $M$ -PSK modulasjon. Her ser vi at union bound faller sammen med kurver for eksakt SER bortsett fra når  $M = 2$ . Når  $M = 2$  er union bound blitt fordoblet sammenlignet med eksakte verdier (faktoren 2 foran  $Q$ -funksjonen i (7.23) sammenlignet med (7.18)). Videre er resultatet for union bound for  $M = 2$  og 4 ganske likt, og de overlapper hverandre på figuren. Men som nevnt tidligere, når  $M = 2$  og  $M = 4$  finnes det eksakte og enkle lukket-form uttrykk for SER slik at approksimasjon og bound ikke er nødvendig.

Ved sammenligning av Figur 7.3 med Figur 7.1 er det observert at  $M = 2$  gir nøyaktig samme resultater.



Figur 7.3: Eksakt SER for  $M$ -PSK modulasjon ((7.20)) sammen med "union bound"((7.23)).

### 7.2.3 BER

En måte å finne eksakt BER av  $M$ -PSK modulasjon er å utføre en bit-to-symbol mapping med Gray coding. Denne metoden forutsetter beregningen av sannsynligheten at mottatt signalvektor ligger innenfor hvert desisjonsområde (totalt  $2\pi/M$  radianer på begge sider av et symbol). La  $P_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ , representere disse sannsynlighetene, og de kan skrives som [12, ligning (4.198b)]

$$P_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi(1-(2n-1)/M)} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_b k \sin^2[(2n-1)\pi/M]}{N_0 \sin^2 \theta}\right) d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi(1-(2n+1)/M)} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_b k \sin^2[(2n+1)\pi/M]}{N_0 \sin^2 \theta}\right) d\theta. \quad (7.25)$$

BER for  $M = 4, 8, 16$  er som følgende [9], [8]:

$$\text{BER}_{4\text{-PSK}} = \frac{1}{2}(P_1 + 2P_2 + P_3), \quad M = 4, \quad (7.26)$$

$$\text{BER}_{8\text{-PSK}} = \frac{1}{3}(P_1 + 2P_2 + P_3 + 2P_4 + 3P_5 + 2P_6 + P_7), \quad M = 8, \quad (7.27)$$

$$\text{BER}_{16\text{-PSK}} = \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^8 P_n + \sum_{n=2}^7 P_n + 0.5P_5 + P_6 + 0.5P_7 \right), \quad M = 16. \quad (7.28)$$

Videre er det velkjent at BER av 2-PSK (BPSK) er identisk med BER av 4-PSK (QPSK). Det vil si  $\text{BER}_{4\text{-PSK}} = \text{BER}_{2\text{-PSK}} = Q\left(\sqrt{2\mathcal{E}_b/N_0}\right)$ . Forskjellen med de to modulasjonstypene er at QPSK krever halvparten av båndbredden som BPSK gjør.

Selv om eksakt BER kan oppnås for et antall verdier av  $M$ , må man eksplisitt regne en god del av  $P_n$  før BER blir beregnet for hver  $M$ .

Ved høye SNR kan BER approksimeres med  $\text{SER}/k$ . Imidlertid, når vi seinere skal studere feilrate over fading kanaler hvor SNR kan ha verdier nær null, trenger vi et BER uttrykk som er gyldig for både lave og høye SNR'er for alle  $M$ . Det kan vises at [10]

$$\text{BER}_{M\text{-PSK}} \approx \frac{2}{\max(k, 2)} \sum_{l=1}^{\max(M/4, 1)} Q\left(\sqrt{2k \frac{\mathcal{E}_b}{N_0}} \sin \frac{(2l-1)\pi}{M}\right) \quad (7.29)$$

er en god approksimasjon som er gyldig for både lave og høye SNR. Når  $M > 4$  og ved høye SNR, er første ledd i summasjonen den dominerende og den er lik den velkjente union bound av SER i (7.23) dividert på  $k$ . Dermed er de resterende ledd i summasjonen der for å gjøre approximasjonen nøyaktig ved lave SNR.

Hvordan BER endrer seg med SNR er plottet i Figur 7.4. Her ser vi at approksimerte verdi er veldig gode, så den kan trygt brukes til å evaluere bitfeil rater.

## 7.3 M-QAM

### 7.3.1 SER

Her skiller vi mellom kvadratisk QAM konstellasjoner og rektangulære QAM konstellasjoner.

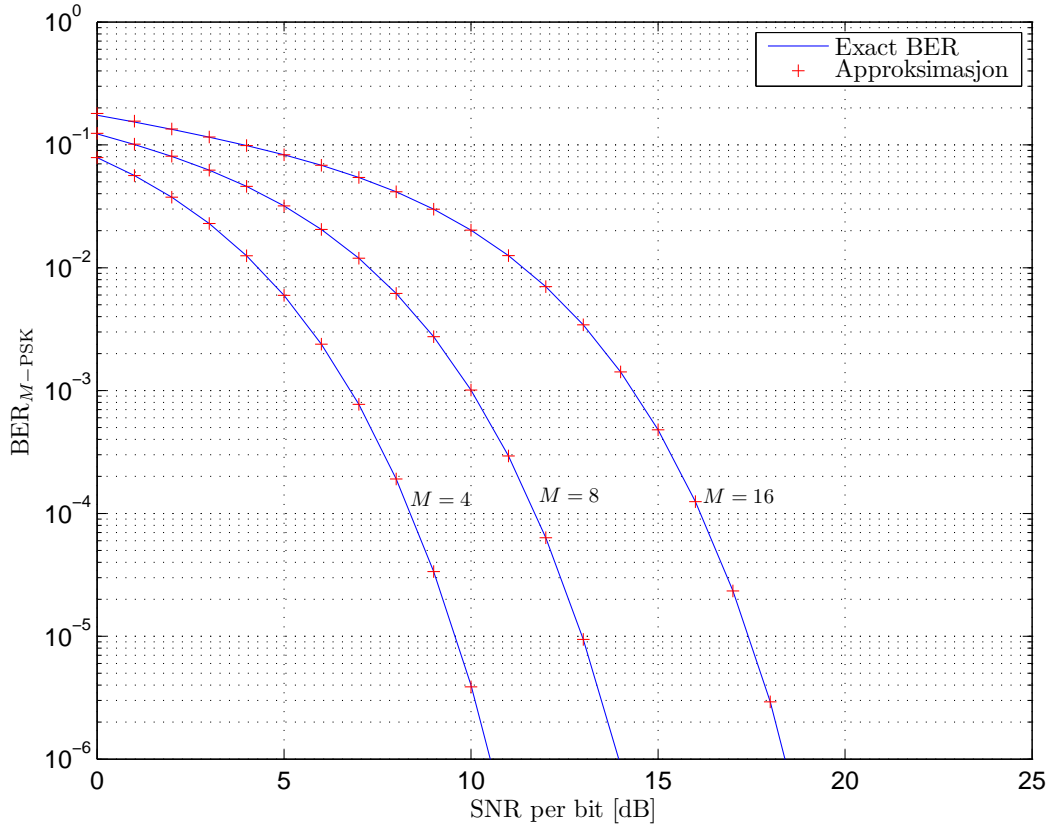
Kvadratisk QAM:

Et symbol fra en kvadratisk QAM konstellasjon vil være en 2-dimensjonal generalisering av en  $M$ -AM på den måten at et  $M$ -QAM symbol er ekvivalent med to uavhengige  $\sqrt{M}$ -AM symboler, hver med  $1/2$  energi. Det medfører at et  $M$ -QAM symbol er riktig detektert hvis to  $\sqrt{M}$ -AM symboler hver for seg er riktig detektert. Matematisk kan det skrives som  $1 - \text{SER}_{M\text{-QAM}}|_{\mathcal{E}_m} = (1 - \text{SER}_{\sqrt{M}\text{-AM}}|_{\mathcal{E}_m/2})^2$ .

Da er midlere sannsynlighet for feil deteksjon

$$\begin{aligned} \text{SER}_{M\text{-QAM}}|_{\mathcal{E}_m} &= 1 - \text{sannsynlighet for riktig deteksjon} \\ &= 1 - \left[1 - \text{SER}_{\sqrt{M}\text{-AM}}|_{\mathcal{E}_m/2}\right]^2 \\ &= 2\text{SER}_{\sqrt{M}\text{-AM}}|_{\mathcal{E}_m/2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\text{SER}_{\sqrt{M}\text{-AM}}|_{\mathcal{E}_m/2}\right). \end{aligned} \quad (7.30)$$





Figur 7.4: Eksakt og approksimasjonen av BER for  $M$ -PSK (ligning (7.26)–(7.28) og (7.29)). Kurven for  $M = 2$  er ikke tatt med her siden den vil være identisk med kurven for  $M = 4$ .

Ved innsetting av SER for  $\sqrt{M}$ -AM inn i uttrykket over får vi

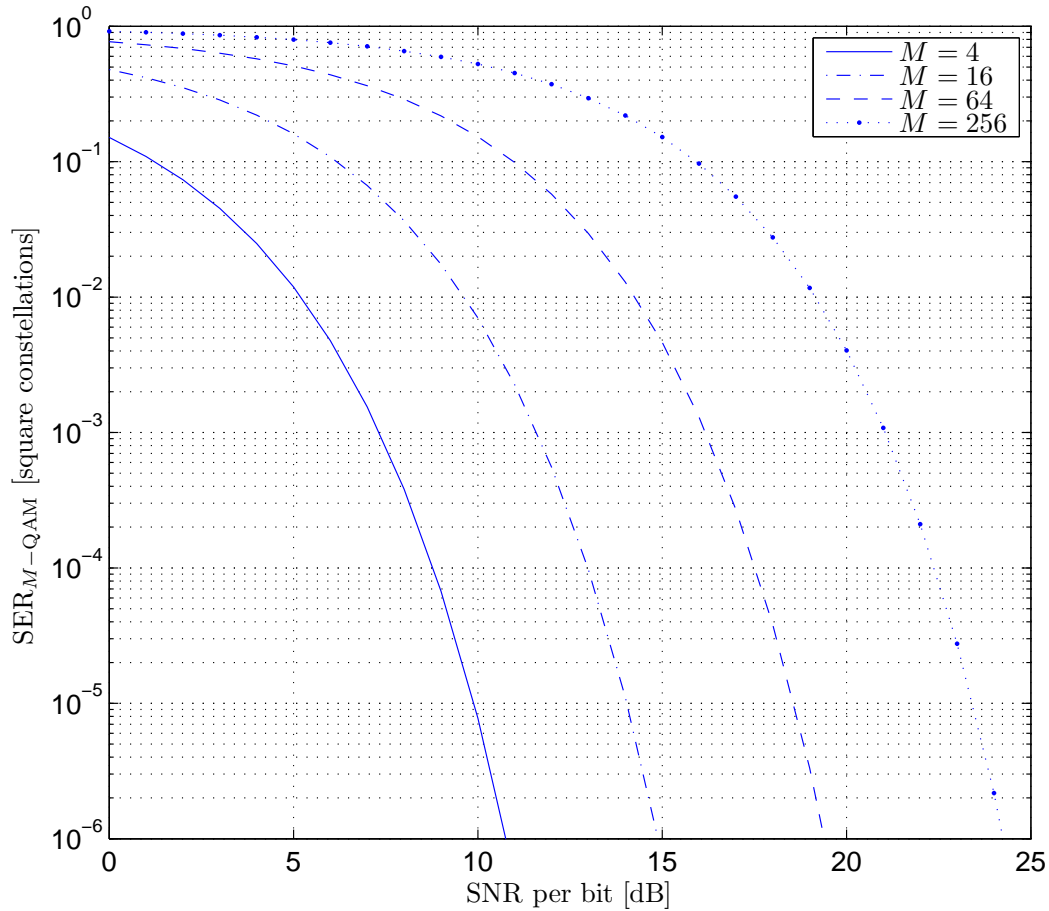
$$\begin{aligned} \text{SER}_{M\text{-QAM}} &= 4 \frac{\sqrt{M} - 1}{\sqrt{M}} Q \left( \sqrt{\frac{3\mathcal{E}}{N_0(M-1)}} \right) \left[ 1 - \frac{\sqrt{M} - 1}{\sqrt{M}} Q \left( \sqrt{\frac{3\mathcal{E}}{N_0(M-1)}} \right) \right] \\ &= 4 \frac{\sqrt{M} - 1}{\sqrt{M}} Q \left( \sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} \frac{3k}{M-1}} \right) - 4 \left( \frac{\sqrt{M} - 1}{\sqrt{M}} \right)^2 Q^2 \left( \sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} \frac{3k}{M-1}} \right) \end{aligned} \quad (7.31)$$

for vilkårlige verdier av  $M = 2^k$  når  $k$  er like. Når  $M = 4$ , reduseres (7.31) til

$$\text{SER}_{4\text{-QAM}} = 2Q \left( \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}} \right) - Q^2 \left( \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}} \right),$$

som er helt identisk med SER for 4-PSK i (7.19).

Figur 7.5 viser SER for forskjellige kvadratiske  $M$ -QAM konstellasjoner.



Figur 7.5: SER for kvadratiske QAM konstellasjoner (ligning (7.31)).

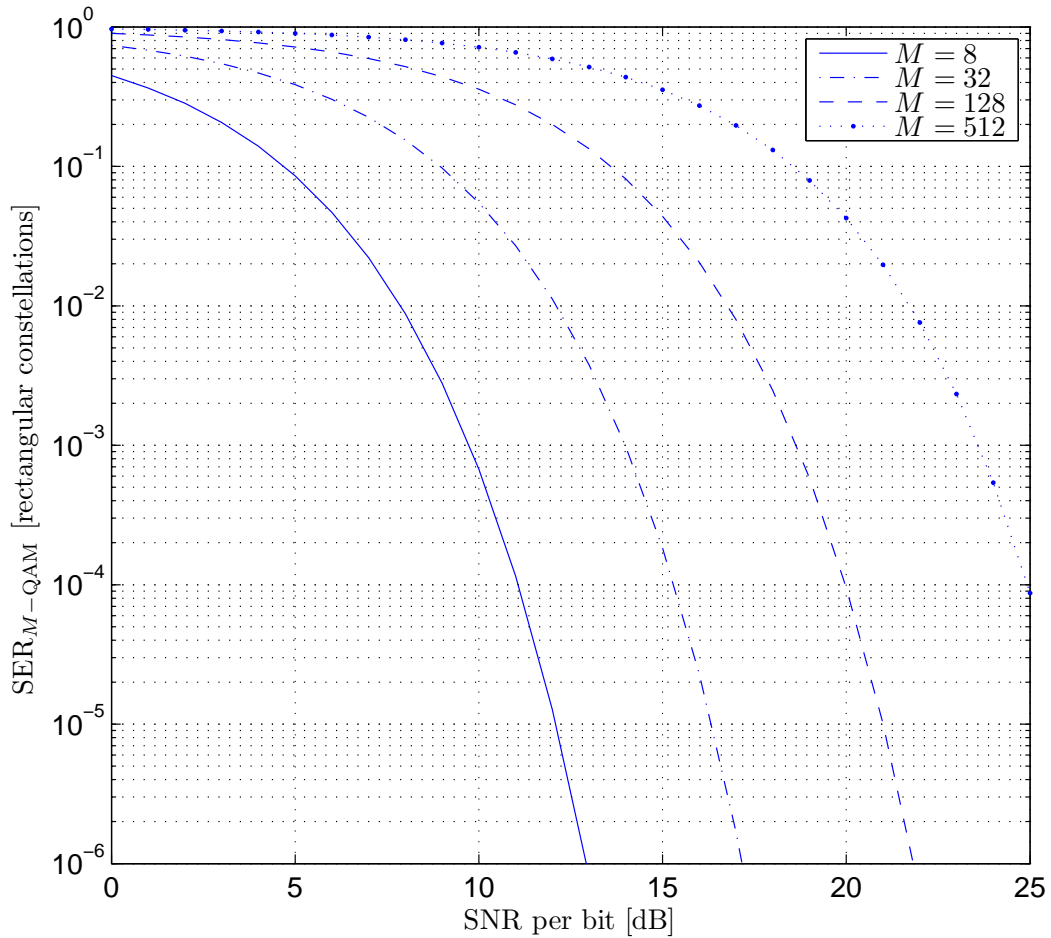
#### Rektangulær QAM:

I dette tilfelle ( $M = 2^k$  og  $k$  er odde) finnes det ikke en ekvivalent  $\sqrt{M}$ -AM-basert løsning slik som i forrige avsnittet. Her kan man kalkulere avstands- eller korrelasjonsmetrikken som vist i (4.5) eller (4.7), og det kan vises at SER kan være upper-bounded med [11]

$$\begin{aligned} \text{SER}_{M\text{-QAM}} &\leq 1 - \left[ 1 - 2Q \left( \sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} \frac{3k}{M-1}} \right) \right]^2 \\ &\leq 4Q \left( \sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} \frac{3k}{M-1}} \right) - 4Q^2 \left( \sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} \frac{3k}{M-1}} \right). \end{aligned} \quad (7.32)$$

Dette er illustrert i Figur 7.6.

For lettere sammenligning viser Figur 7.7 SER for både kvadratiske og rektangulære QAM konstellasjoner. Husk forøvrig at SER kurver for kvadratiske konstellasjoner gjelder eksakt, mens kurver for rektangulære konstellasjoner kun er upper bounds.



Figur 7.6: SER for rektangulære QAM konstellasjoner (ligning (7.32)).

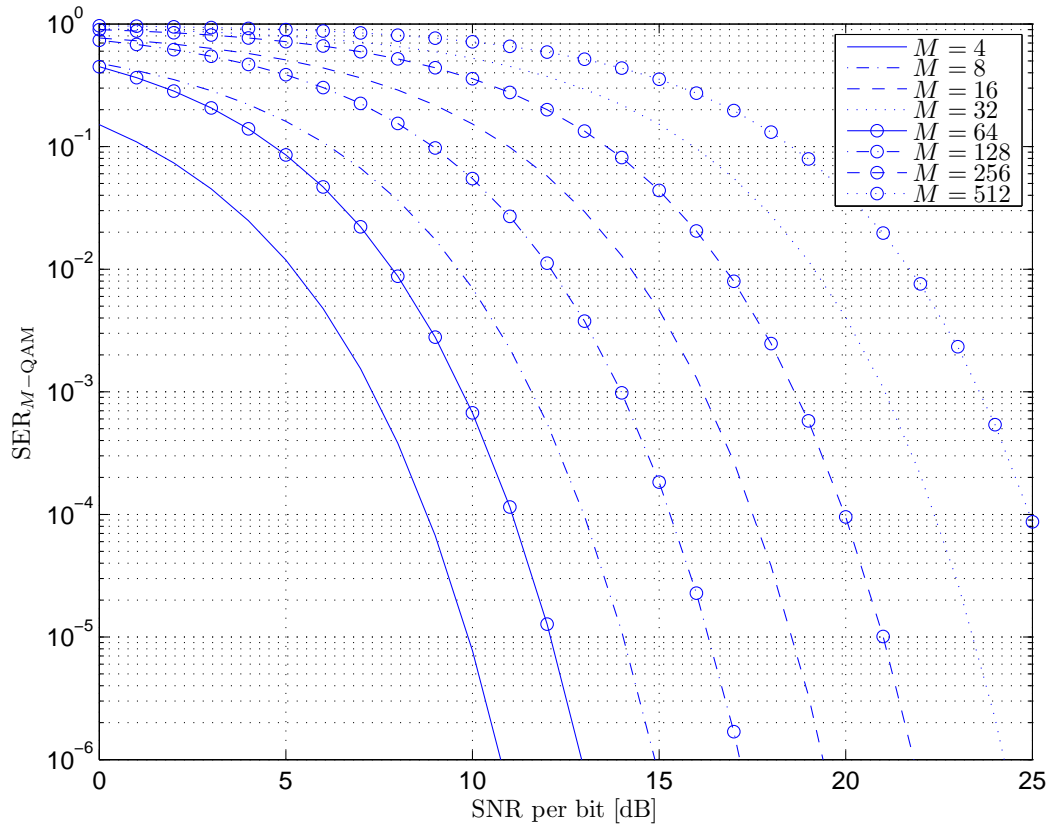
### Alternativ representasjon

Bruker man definisjonen til  $Q$ -funksjonen kan SER av kvadratiske QAM konstellasjoner i (7.31) skrives som en sum av 2 definite integraler:

$$\begin{aligned} \text{SER}_{M\text{-QAM}} = & \frac{4}{\pi} \left( \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} \right) \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} \frac{3k}{2(M-1)\sin^2\theta}\right) d\theta \\ & - \frac{4}{\pi} \left( \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} \right)^2 \int_0^{\pi/4} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} \frac{3k}{2(M-1)\sin^2\theta}\right) d\theta. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Tilsvarende kan SER av rektangulære QAM konstellasjoner i (7.32) skrives som:

$$\text{SER}_{M\text{-QAM}} < \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} \frac{3k}{2(M-1)\sin^2\theta}\right) d\theta \quad (7.34)$$



Figur 7.7: SER for QAM konstellasjoner (ligning (7.31) og (7.32)).

### 7.3.2 BER

Kvadratisk QAM:

Bruker man Gray koding for å konvertere bit til symboler, kan man finne eksakt BER for vilkårlige kvadratisk  $M$ -QAM med [14]

$$\text{BER}_{M\text{-QAM}} = \frac{2}{\sqrt{M} \log_2 \sqrt{M}} \sum_{n=1}^{\log_2 \sqrt{M}} \text{BER}_n \quad (7.35)$$

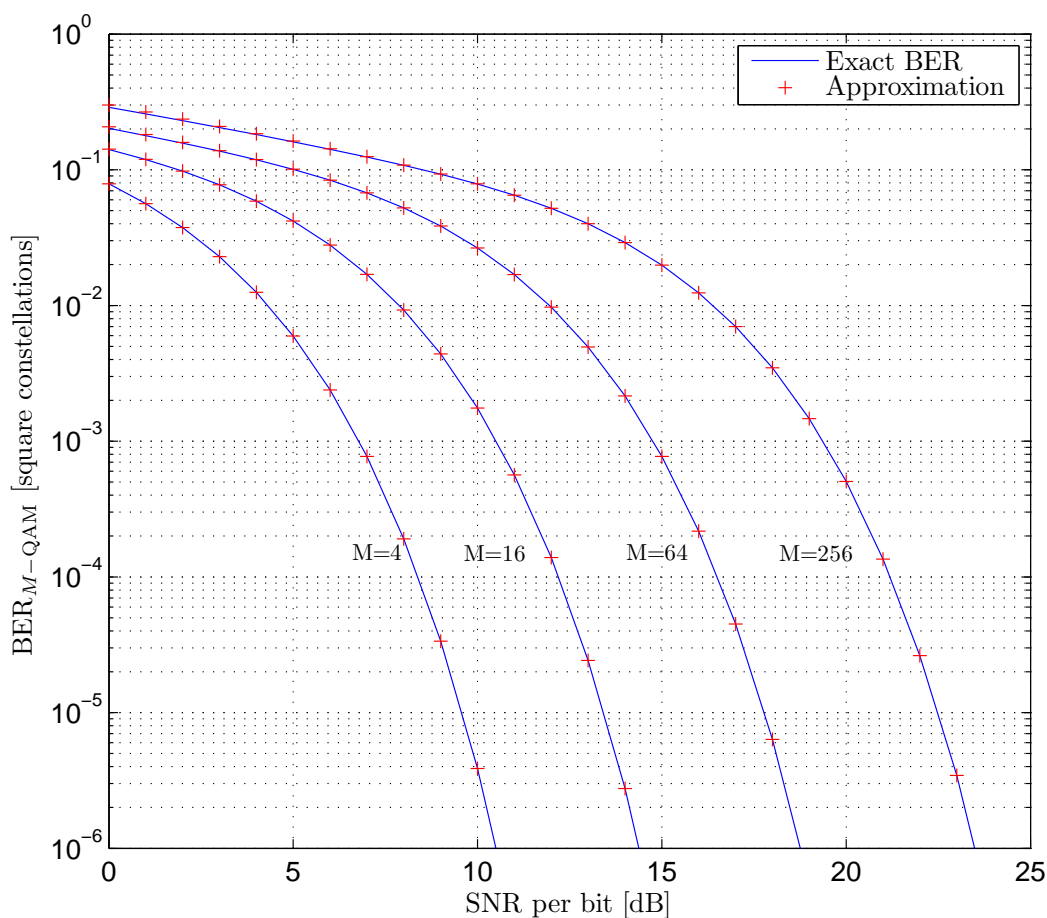
hvor

$$\text{BER}_n = \sum_{i=0}^{(1-2^{-n})\sqrt{M}-1} (-1)^{\lfloor (i2^{n-1})/\sqrt{M} \rfloor} \left( 2^{n-1} - \left\lfloor \frac{i2^{n-1}}{\sqrt{M}} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right) Q \left( (2i+1) \sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} \frac{3k}{M-1}} \right). \quad (7.36)$$

Videre kan BER approksimeres med [10]

$$\text{BER}_{M\text{-QAM}} \approx \frac{4(\sqrt{M}-1)}{k\sqrt{M}} \sum_{i=0}^{\sqrt{M}/2-1} Q \left( (2i+1) \sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} \frac{3k}{M-1}} \right), \quad (7.37)$$

som er gyldig for både lave og høye SNR. Igjen, første ledd i summasjonen vil være den dominerende ved høy SNR, slik at resterende ledd er med å gjøre approksimasjonen nøyaktig også ved lave SNR.



Figur 7.8: Eksakt og approksimasjon av BER for kvadratiske  $M$ -QAM konstellasjoner (ligning (7.35) og (7.37)).

Rektangulær QAM:

La oss anta at konstellasjonen har  $I$  symboler i I-komponenten mens  $J$  representerer antall symboler i Q-komponenten. La  $2d_I$  og  $2d_J$  henholdsvis være minste avstanden mellom to nærliggende symboler i I- og Q-komponentene, slik at  $\eta = d_J/d_I$  er forholdet av minste avstanden mellom dem. Med disse antagelser, kan BER for en vilkårlig rektangulær QAM uttrykkes eksakt som [3]

$$\text{BER}_{M\text{-QAM}} = \frac{1}{\log_2(IJ)} \left( \sum_{n=1}^{\log_2 I} \text{BER}_n^I + \sum_{l=1}^{\log_2 J} \text{BER}_l^J \right), \quad (7.38)$$

hvor

$$\text{BER}_n^I = \frac{2}{I} \sum_{i=0}^{(1-2^{-n})I-1} \left\{ (-1)^{\lfloor (i2^{n-1})/I \rfloor} \left( 2^{n-1} - \left\lfloor \frac{i2^{n-1}}{I} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right) \right. \\ \left. \times Q \left( \sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} \frac{6(2i+1)^2 \log_2(IJ)}{(I^2-1) + \eta^2(J^2-1)}} \right) \right\}, \quad (7.39)$$

$$\text{BER}_l^J = \frac{2}{J} \sum_{j=0}^{(1-2^{-l})J-1} \left\{ (-1)^{\lfloor (j2^{l-1})/J \rfloor} \left( 2^{l-1} - \left\lfloor \frac{j2^{l-1}}{J} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right) \right. \\ \left. \times Q \left( \sqrt{\eta^2 \frac{\mathcal{E}_b}{N_0} \frac{6(2j+1)^2 \log_2(IJ)}{(I^2-1) + \eta^2(J^2-1)}} \right) \right\} \quad (7.40)$$

Ved høye SNR er de leddene når  $i = 0$  og  $j = 0$  de dominerende slik at BER kan approksimeres ved å fjerne de resterende ledd i summasjonen. Det vil si

$$\text{BER}_{M\text{-QAM}} \approx \frac{2}{\log_2(IJ)} \left\{ \frac{I-1}{I} Q \left( \sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} \frac{6 \log_2(IJ)}{(I^2-1) + \eta^2(J^2-1)}} \right) \right. \\ \left. + \frac{J-1}{J} Q \left( \sqrt{\eta^2 \frac{\mathcal{E}_b}{N_0} \frac{6 \log_2(IJ)}{(I^2-1) + \eta^2(J^2-1)}} \right) \right\}. \quad (7.41)$$

Når  $d_I = d_J$ , dvs.  $\eta = 1$ , og  $I = J$  vil (7.41) reduseres til (7.37).

## 7.4 M-FSK

### 7.4.1 SER

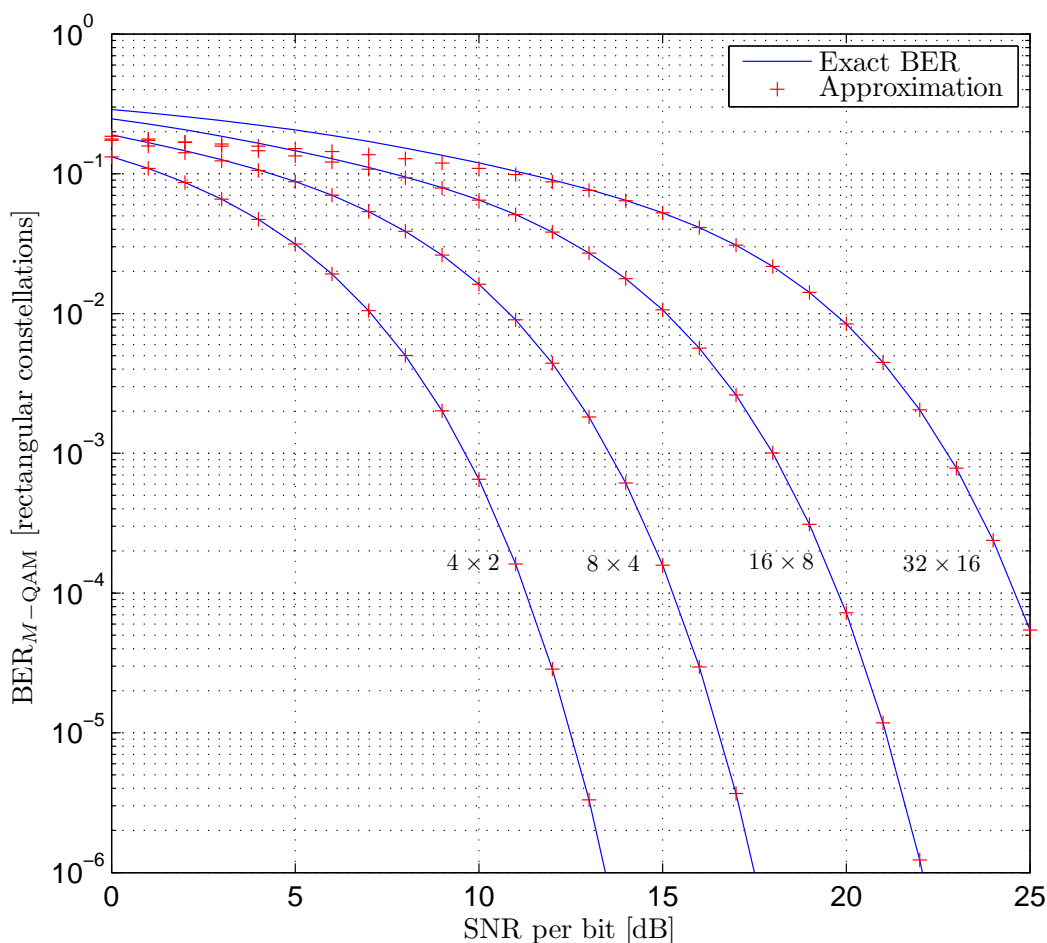
Når  $S_m(t)$  er sendt vil mottatt signal være (se ligningene (4.2), (5.11) og (5.12))

$$r_k = \int_0^{T_s} r(t) \varphi_k(t) dt = \begin{cases} n_k, & k \neq m \\ \sqrt{\mathcal{E}} + n_m, & k = m \end{cases}$$

for  $k = 1, 2, \dots, K = M$ .

Når signaler er ortogonale med lik energi, vil en optimal detektor være den som beregner krysskorrelasjonen mellom mottatt signalvektor  $\mathbf{r}$  og hver av de mulig  $M$  sendte vektorer med elementer som beskrevet i (5.12), og velger vektoren med index  $m$  som gir størst korrelasjonen. Med andre ord, den vil beregne denne metrikken:

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{a}_m) = \mathbf{r}^T \mathbf{a}_m = \sum_{k=1}^M r_k a_{mk}, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$



Figur 7.9: Eksakt og approksimasjon av BER for rektangulære  $M$ -QAM konstellasjoner hvor  $M = I \times J$  (ligning (7.38) og (7.41)).

For å finne feilsannsynligheter, antar vi at  $S_1(t)$  (dvs. vektoren  $\mathbf{a}_1$ ) var sendt slik at den demodulerte vektoren blir  $\mathbf{r} = [\sqrt{\mathcal{E}} + n_1, n_2, n_3, \dots, n_M]^T$ , hvor  $n_m, m = 1, 2, \dots, M$  er gaussisk støy med null i middel og varians lik  $N_0/2$ . På utgangen av de  $M$  korrelatorer får man

$$\begin{aligned}
 C(\mathbf{r}, \mathbf{a}_1) &= (\sqrt{\mathcal{E}} + n_1)\sqrt{\mathcal{E}} \\
 C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_2) &= n_2\sqrt{\mathcal{E}} \\
 &\vdots \\
 C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_M) &= n_M\sqrt{\mathcal{E}}.
 \end{aligned}$$

Siden  $\sqrt{\mathcal{E}}$  inngår i alle metrikker og ikke vil påvirke desisjonen, kan den sees bort i fra. Da vil PDF'en til utgangen av den første korrelator være gaussisk med middelveirdi  $\sqrt{\mathcal{E}}$ , mens den vil være gaussisk med null i middel for alle de andre korrelator utganger. Derimot er det samme varians på alle utgangene.

La  $f(r_m)$  være PDF til korrelator utgang nummer  $m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ . En korrekt desisjon vil skje når sannsynlighet at  $r_1$  er større enn de verdier på de andre utgangene. Dvs.

$$P_{\text{korrekt}} = \int_{-\infty}^{\infty} P(n_2 < r_1, n_3 < r_1, \dots, n_M < r_1 | r_1) f(r_1) dr_1 \quad (7.43)$$

hvor  $P(n_2 < r_1, n_3 < r_1, \dots, n_M < r_1 | r_1)$  er simultansannsynlighet at  $n_2, n_3, \dots, n_M$  er alle mindre enn  $r_1$  når  $r_1$  er gitt. Siden  $\{n_m\}$  er uavhengige gaussiske stokastiske variabler, blir simultansannsynlighet et produkt av sannsynlighetene med følgende marginalsannsynligheter:

$$\begin{aligned} P(n_m < r_1 | r_1) &= \int_{-\infty}^{r_1} f(r_m) dr_m, \quad m = 2, 3, \dots, M \\ &= \int_{-\infty}^{r_1} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{r_m^2}{N_0}\right) dr_m \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{r_1 \sqrt{2/N_0}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx. \end{aligned}$$

Dermed blir (7.43)

$$P_{\text{korrekt}} = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{r_1 \sqrt{2/N_0}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right)^{M-1} f(r_1) dr_1,$$

og symbolfeil sannsynlighet blir

$$\text{SER}_{M\text{-FSK}} = 1 - P_{\text{korrekt}}. \quad (7.44)$$

Og dette kan skrives som [12, 11]

$$\begin{aligned} \text{SER}_{M\text{-FSK}} &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Q\left(-q - \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{N_0}}\right)^{M-1} \exp\left(-\frac{q^2}{2}\right) dq \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Q\left(-q - \sqrt{\frac{2k\mathcal{E}_b}{N_0}}\right)^{M-1} \exp\left(-\frac{q^2}{2}\right) dq. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Igjen er resultatet i lukket-form, men den må evalueres numerisk siden den inneholder et indefinit integral. Vi er dermed interessert i en bound som er enklere. Det kan vises at SER kan begrenses med en union bound uttrykkes ved [11]

$$\text{SER}_{M\text{-FSK}} \leq (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{k\mathcal{E}_b}{N_0}}\right). \quad (7.46)$$

En mer nøyaktig bound kan også finnes i [7]:

$$\text{SER}_{M\text{-FSK}} \leq 1 - \left[ 1 - Q\left(\sqrt{\frac{k\mathcal{E}_b}{N_0}}\right) \right]^{M-1}. \quad (7.47)$$



## 7.4.2 Noen spesielle tilfeller som resulterer i lukket-form løsninger

### Binær FSK

Vektorene  $\mathbf{a}_1$  og  $\mathbf{a}_2$  er henholdsvis  $\mathbf{a}_1 = [\sqrt{\mathcal{E}_b}, 0]^T$  og  $\mathbf{a}_2 = [0, \sqrt{\mathcal{E}_b}]^T$ . La oss anta nå at  $S_1(t)$ —dvs.  $\mathbf{a}_1$  var sendt slik at mottatt vektor blir  $\mathbf{r} = [\sqrt{\mathcal{E}_b} + n_1, n_2]^T$ . Korrelasjonsmetrikkene  $C(\mathbf{r}, \mathbf{a}_1)$  og  $C(\mathbf{r}, \mathbf{a}_2)$  blir beregnet, og sannsynlighet for symbol- eller bitfeil blir da

$$P(E|\mathbf{a}_1) = P((C(\mathbf{r}, \mathbf{a}_2) > C(\mathbf{r}, \mathbf{a}_1)) | \mathbf{a}_1) = P(n_2 - n_1 > \sqrt{\mathcal{E}_b}).$$

Siden  $n_1$  og  $n_2$  er gaussiske stokastiske variabler med null i middel og varians lik  $N_0/2$ , vil  $n_2 - n_1$  også være en gaussisk stokastisk variabel med middelvei lik null og varians lik  $N_0$ . Da gjelder

$$\begin{aligned} P(n_2 - n_1 > \sqrt{\mathcal{E}_b}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} \int_{\sqrt{\mathcal{E}_b}}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2N_0}\right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{\mathcal{E}_b/N_0}}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}\right). \end{aligned}$$

På grunn av symmetri får man eksakt samme resultat dersom man hadde antatt at  $\mathbf{a}_2$  var sendt. Den totale sannsynlighet for feil blir da

$$\text{SER}_{2\text{-FSK}} = \text{BER}_{2\text{-FSK}} = \frac{1}{2}(P(E|\mathbf{a}_1) + P(E|\mathbf{a}_2)) = Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}\right). \quad (7.48)$$

Denne modulasjonstypen krever 3 dB mer i SNR for å oppnå samme BER som BPSK gjør.

### 3-FSK og 4-FSK

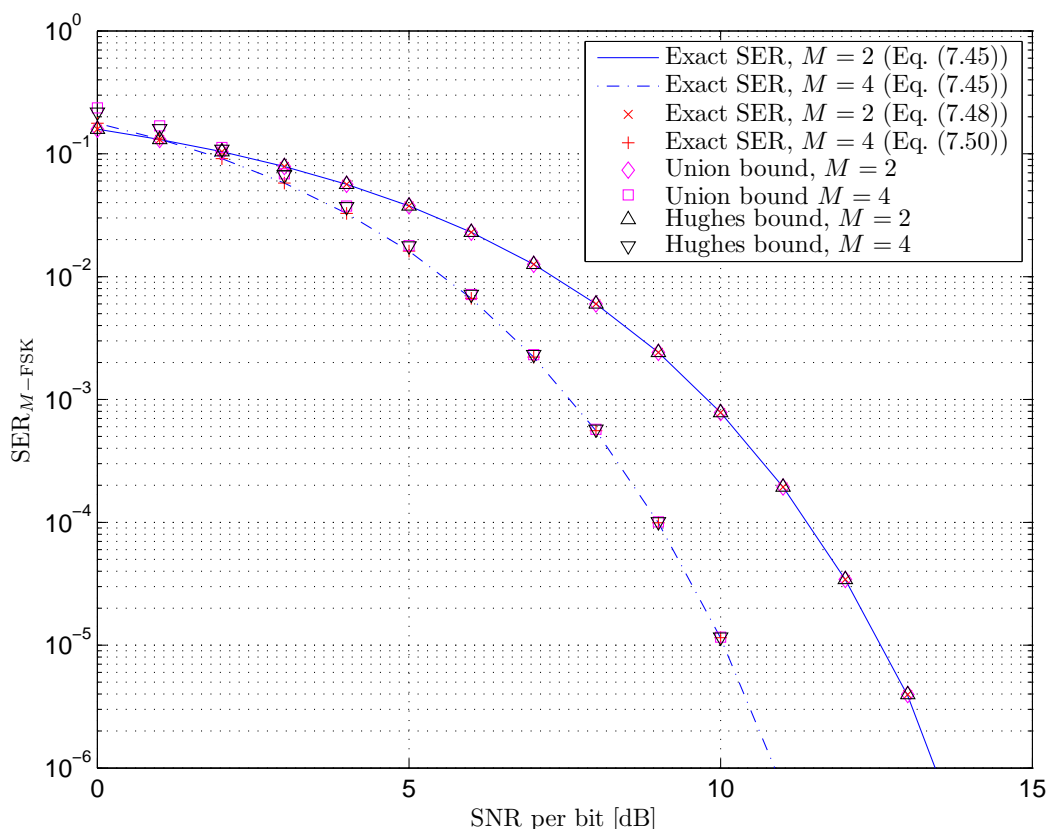
Ligning (7.45) kan ikke reduseres til noe enklere for vilkårlige verdier av  $M > 2$ . Imidlertid, ved å skifte origo i signalrommet (introdusert i [4]) er det vist i [5] at 3-FSK og 4-FSK henholdsvis kan skrives som:

$$\text{SER}_{3\text{-FSK}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi/3} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} \frac{k}{2 \sin^2 \theta}\right) d\theta, \quad (7.49)$$

og

$$\begin{aligned} \text{SER}_{4\text{-FSK}} &= Q\left(\sqrt{\frac{3k\mathcal{E}_b}{2N_0}}\right) \\ &+ \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \frac{3 \sin \theta}{2\pi \sqrt{2 + \sin^2 \theta}} \exp\left(-\frac{3k\mathcal{E}_b}{N_0(4 + 2 \sin^2 \theta)}\right) \left[1 - Q\left(\frac{\sqrt{3k\mathcal{E}_b} \sin \theta}{\sqrt{N_0(4 + 2 \sin^2 \theta)}}\right)\right] d\theta. \end{aligned} \quad (7.50)$$

Figur 7.10 viser både eksakte SER kurver og upper bounds for 2-FSK og 4-FSK. Kun  $M = 2$  og 4 er plottet på grunn av sammenligningsårsak (ligning (7.45) vs. ligningene (7.48) og (7.50)). For andre verdier av  $M > 4$  finnes det ingen enklere lukket-form uttrykker, og SER må dermed beregnes med ligning (7.45). Figuren viser også at både union bound og Hughes' bound er veldig nøyaktige.



Figur 7.10: Eksakt og approksimerte SER til 2-FSK og 4-FSK.

### 7.4.3 BER

Når de  $M$  symbolene er *ortogonale* og alle er like sannsynlige for å opptre, blir symbolfeil sannsynlighet lik for de resterende  $M - 1$  symbolene<sup>3</sup> siden det er samme avstand mellom symbolene. Denne sannsynligheten finnes ved å dividere symbolfeil sannsynligheten på  $M - 1$  symboler. Videre er det  $\binom{k}{n}$  mulige kombinasjoner hvor  $n$  av  $k$  bit kan være feil. Dermed blir antall bit som er feil per et  $k$ -bit symbol en middelvei gitt ved

$$\sum_{n=1}^k n \binom{k}{n} \frac{\text{SER}_{M\text{-FSK}}}{M-1} = k \frac{2^{k-1}}{M-1} \text{SER}_{M\text{-FSK}}.$$

Dividerer man ovennevnte uttrykket på antall bit per symbol, får man bitfeil sannsynlighet, og resultatet blir

$$\text{BER}_{M\text{-FSK}} = \frac{1}{2} \frac{M}{M-1} \text{SER}_{M\text{-FSK}}. \quad (7.51)$$

Bruker man union bound i (7.46) kan BER begrenses med

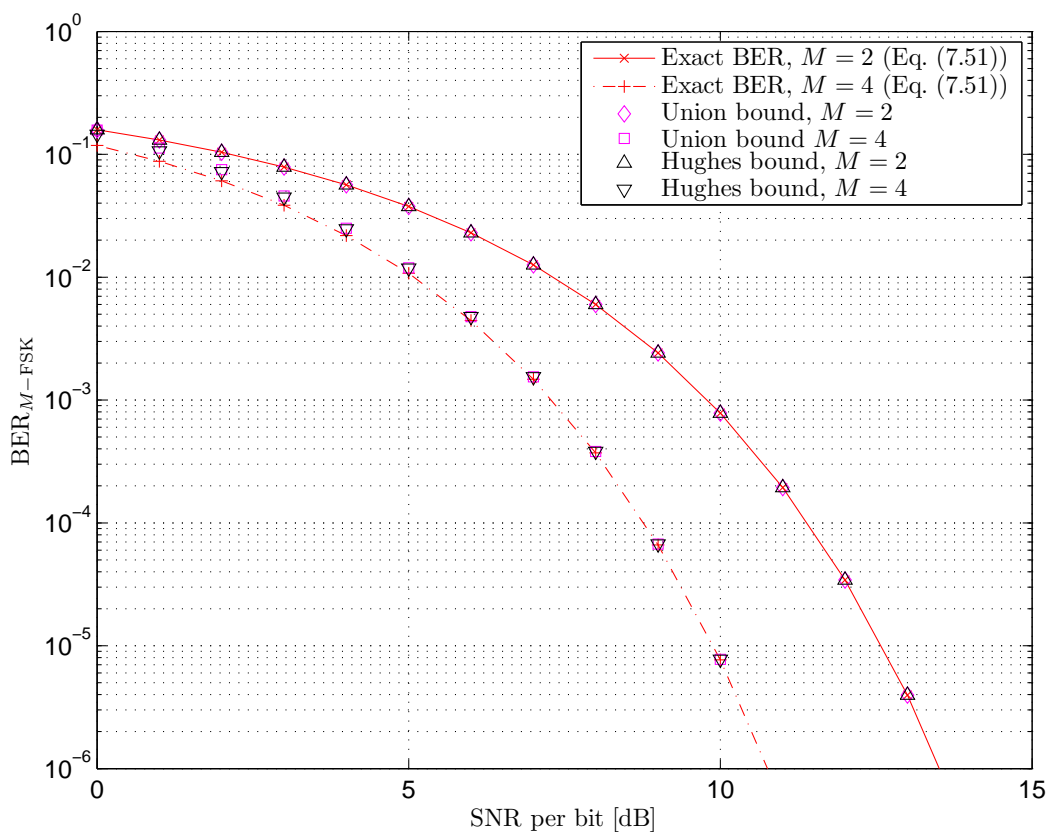
$$\text{BER}_{M\text{-FSK}} \leq \frac{M}{2} Q \left( \sqrt{\frac{k \mathcal{E}_b}{N_0}} \right), \quad (7.52)$$

<sup>3</sup>Dette er fordi et av de  $M$  symbolene skal være den riktige.

mens med Hughes' bound blir BER

$$\text{BER}_{M\text{-FSK}} \leq \frac{1}{2} \frac{M}{M-1} \left( 1 - \left[ 1 - Q\left(\sqrt{\frac{k\mathcal{E}_b}{N_0}}\right) \right]^{M-1} \right). \quad (7.53)$$

Både eksakt BER, union bound og Hughes bound er plottet i Figur 7.11.



Figur 7.11: Union bound og Hughes' bound sammen med eksakte BER kurver for 2-FSK og 4-FSK modulasjon.

## 8 Fading kanaler

Over en fading kanal blir signal utsatt for en tidsvarierende dempning i tillegg til additiv støy. La  $\alpha$  være en stokastisk variabel som beskriver denne dempningen, og la  $E[\alpha^2] = \Omega$ . Da har  $\alpha$  en fordelingsfunksjon som er avhengig av hva slags fading det er på kanalen. Videre, la

$$\gamma = \frac{\alpha^2 \mathcal{E}_b}{N_0} \quad (8.1)$$

være instantant SNR per bit, slik at gjennomsnittet blir

$$\bar{\gamma} = \frac{\Omega \mathcal{E}_b}{N_0}. \quad (8.2)$$

Generelt vil gjennomsnitt feilrate (enten SER eller BER) over en fading kanal kan regnes ved å løse integralet:<sup>4</sup>

$$P(E) = \int_0^\infty P(E|\gamma) f(\gamma) d\gamma, \quad (8.3)$$

hvor  $P(E|\gamma)$  er SER eller BER over gaussiske kanaler med  $\mathcal{E}_b/N_0$  (eller  $\mathcal{E}_s/N_0$ ) erstattet med  $\gamma$  (eller  $\gamma_s$ ).

## 8.1 Fading modeller

Avhengig av miljøet der kommunikasjonen finner sted vil det oppstå forskjellige typer fadinger. Når det er friskt mellom enheter som kommuniserer med hverandre, har vi en fading modell som er godt beskrevet med Rice PDF, ellers vil en Rayleigh PDF være beskrivende når det er ingen direktesikt mellom sender og mottaker.

I stedet for å regne på Rice og Rayleigh fading eksplisitt, kan vi bruke en modell heter Nakagami multipath fading. PDF til SNR i denne modellen kalles ofte for Nakagami- $m$ , og er gitt ved

$$f(\gamma) = \frac{m^m}{\Gamma(m)} \frac{\gamma^{m-1}}{\bar{\gamma}^m} \exp\left(-m \frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right), \quad (8.4)$$

og dens momentgenererende funksjon (MGF) er

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\gamma(-s) &= \int_0^\infty \exp(-s\gamma) f(\gamma) d\gamma \\ &= \left(1 + \frac{s\bar{\gamma}}{m}\right)^{-m}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Fordel med denne PDF er at man oppnår Rayleigh fading ved å sette  $m = 1$ . Videre, kan Rice fading approksimeres med stor nøyaktighet ved å benytte relasjonen

$$m = \frac{(K + 1)^2}{2K + 1}, \quad m > 1 \quad (8.6)$$

hvor  $K$  er Rice faktor som beskriver forholdet mellom direktesikt og de reflekterte signaler mottatt hos mottakeren. Når  $K = 0$  har vi Rayleigh fading.

Parameteren  $m$  trenger ikke å være heltallig. Når  $m = 1/2$  vil Nakagami PDF være en ensidig gaussisk fordelingsfunksjon. Man får gaussisk fordeling ved å la  $m \rightarrow \infty$ . I tillegg til at Nakagami- $m$  PDF kan brukes til forskjellige type fadinger ved å endre på  $m$ , består PDF'en kun av elementære funksjoner slik at den ofte fører til lukket-form resultater. På grunn av ovennevnte grunner skal vi kun presentere resultater av SER og BER for Nakagami modellen i fading miljøer.

<sup>4</sup>Vi bruker  $P(E)$  for både SER og BER, siden dette integralet gjelder for begge tilfellene.

## 8.2 Integral av MGF for Nakagami modell

Før vi diskuterer SER/BER for fading kanaler presenterer vi, i dette avsnittet, noen nyttig matematiske integraler som dukker opp mange steder i analysen av fading scenarier.

### 8.2.1 Integral hvor $Q$ -funksjonen er involvert

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int_0^\infty Q(a\sqrt{\gamma}) f(\gamma) d\gamma \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{a^2\gamma}{2\sin^2\theta}\right) d\theta f(\gamma) d\gamma \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \mathcal{M}_\gamma\left(-\frac{a^2}{2\sin^2\theta}\right) d\theta.\end{aligned}\tag{8.7}$$

For en Nakagami modell får vi

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{a^2\bar{\gamma}}{2m\sin^2\theta}\right)^{-m} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{c}{\sin^2\theta}\right)^{-m} d\theta \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{\mu}{2} \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{2\ell}{\ell} \left(\frac{1-\mu^2}{4}\right)^\ell, & m \text{ heltallig} \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{c}}{(1+c)^{m+1/2}} \frac{\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(m+1)} {}_2F_1\left(1, m + \frac{1}{2}; m+1; \frac{1}{1+c}\right), & m \text{ ikke-heltallig} \end{cases}\end{aligned}\tag{8.8}$$

hvor  $c = a^2\bar{\gamma}/(2m)$ , og  $\mu = \sqrt{c/(1+c)}$ . Videre er  ${}_2F_1(a, b; c; z)$  en Gauss hypergeometrisk funksjon definert ved

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(a)_l (b)_l}{(c)_l} \frac{z^l}{l!},$$

hvor notasjonen  $(a)_l = \Gamma(a+l)/\Gamma(a) = a(a+1)\cdots(a+l-1)$ .

### 8.2.2 Integral hvor $Q^2$ -funksjonen er involvert

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty Q^2(a\sqrt{\gamma}) f(\gamma) d\gamma.\tag{8.9}$$

Generelt er dette integralet veldig vanskelig å evaluere analytisk for vilkårlig  $m$  parameter. Imidlertid kan  $Q^2(a\sqrt{\gamma})$  skrives som

$$Q^2(a\sqrt{\gamma}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/4} \exp\left(-\frac{a^2\gamma}{2\sin^2\theta}\right) d\theta,\tag{8.10}$$

og med  $m$  heltallig kan (8.9) løses hvor resultatet kan skrives i lukket-form uttrykk:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} &= \int_0^\infty \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/4} \exp\left(-\frac{a^2\gamma}{2\sin^2\theta}\right) d\theta f(\gamma) d\gamma \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/4} \mathcal{M}_\gamma\left(-\frac{a^2}{2\sin^2\theta}\right) d\theta \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/4} \left(1 + \frac{a^2\bar{\gamma}}{2m\sin^2\theta}\right)^{-m} d\theta \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/4} \left(1 + \frac{c}{\sin^2\theta}\right)^{-m} d\theta \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \mu \left\{ \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\mu\right) \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{2\ell}{\ell} \left(\frac{1}{4(1+c)}\right)^\ell \right. \\
&\quad \left. - \sin(\tan^{-1}\mu) \sum_{\ell=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{\ell} \left(\frac{1}{1+c}\right)^\ell T_{j\ell} [\cos(\tan^{-1}\mu)]^{2(\ell-j)+1} \right\}, \quad (8.11)
\end{aligned}$$

hvor  $c = a^2\bar{\gamma}/(2m)$  og  $\mu = \sqrt{c/(1+c)} = \sqrt{a^2\bar{\gamma}/(2m + a^2\bar{\gamma})}$ , og

$$T_{j\ell} \triangleq \frac{\binom{2\ell}{\ell}}{\binom{2(\ell-j)}{\ell-j} 4^j [2(\ell-j) + 1]}. \quad (8.12)$$

## 9 Analysen av feiltrater over fading kanaler - Koherent kommunikasjon

### 9.1 M-AM

#### 9.1.1 SER

Setter man inn SER i (7.6) (med  $\mathcal{E}_b/N_0$  erstattet med  $\gamma$ ) inn i (8.3) og integrerer ut ved hjelp av (8.7) og (8.8) får man

$$\begin{aligned}
\text{SER}_{M\text{-AM}}^{\text{fading}} &= \frac{M-1}{M} \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(m+1)} \frac{[m(M^2-1)]^m (3k\bar{\gamma})^{1/2}}{[m(M^2-1) + 3k\bar{\gamma}]^{m+1/2}} \\
&\quad \times {}_2F_1\left(1, m + \frac{1}{2}; m+1; \frac{m(M^2-1)}{m(M^2-1) + 3k\bar{\gamma}}\right), \quad (9.1)
\end{aligned}$$

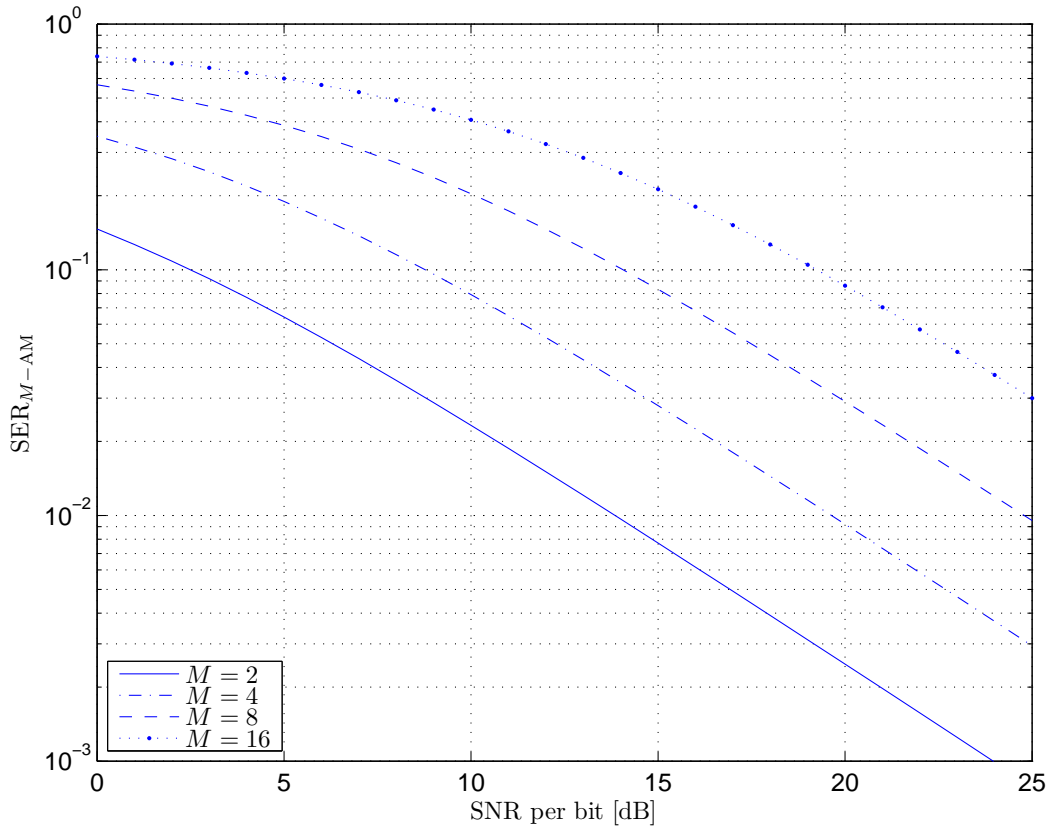
for generelt  $m$  større eller lik  $1/2$ . Når  $m$  er heltallig, større eller lik 1, reduseres (9.1) til

$$\text{SER}_{M\text{-AM}}^{\text{fading}} = \frac{M-1}{M} \left[ 1 - \mu \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{2\ell}{\ell} \left(\frac{1-\mu^2}{4}\right)^\ell \right] \quad (9.2)$$

hvor

$$\mu \triangleq \sqrt{\frac{3k\bar{\gamma}}{m(M^2-1) + 3k\bar{\gamma}}}.$$

Dette uttrykket er plottet i Figur 9.1 for  $m = 1$ , dvs. Rayleigh fading.



Figur 9.1: SER av  $M$ -AM modulasjoner over en Rayleigh fading kanal (ligning (9.2) for  $m = 1$ ).

### 9.1.2 BER

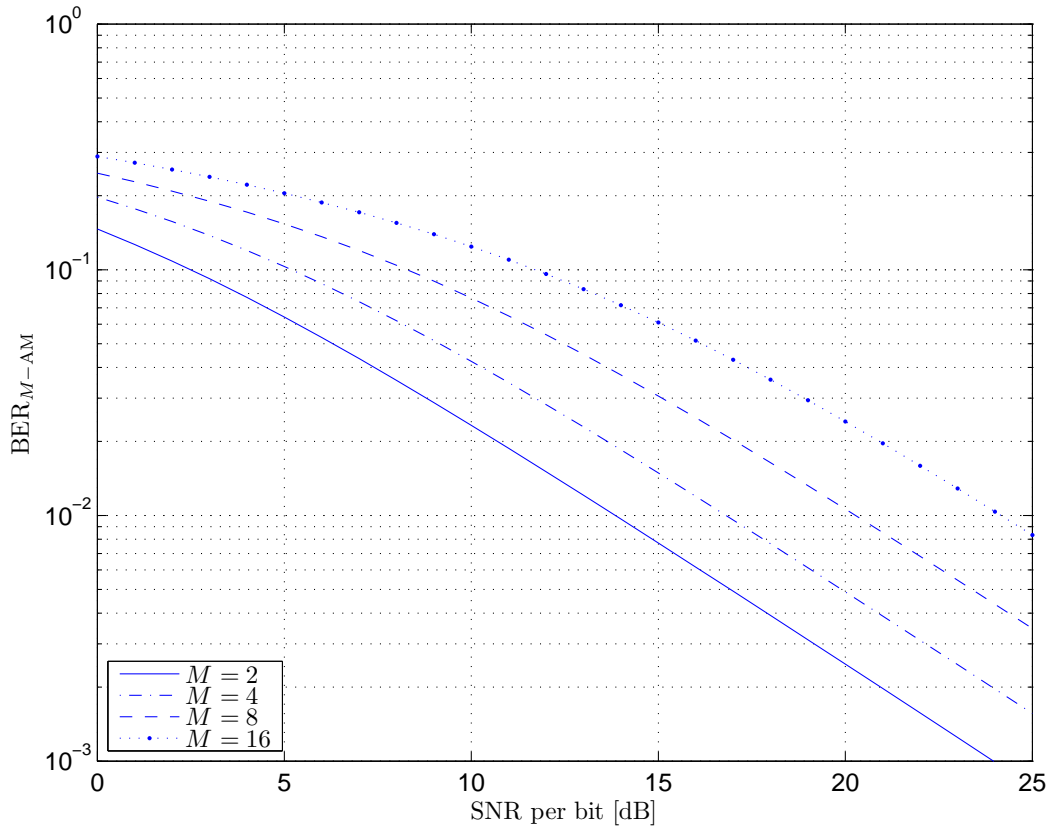
Setter man (7.10) inn i (8.3) og integrerer ut får man:

$$\text{BER}_{M\text{-AM}}^{\text{fading}} = \frac{1}{\log_2 M} \sum_{n=1}^{\log_2 M} \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{(1-2^{-n})M-1} (-1)^{\lfloor (i2^{n-1})/M \rfloor} \left( 2^{n-1} - \left\lfloor \frac{i2^{n-1}}{M} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right) \times \left[ 1 - \mu \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{2\ell}{\ell} \left( \frac{1-\mu^2}{4} \right)^\ell \right], \quad (9.3)$$

hvor

$$\mu = \sqrt{\frac{3k\gamma(2i+1)^2}{m(M^2-1) + 3(2i+1)^2k\gamma}}.$$

BER kurvene for ulike  $M$  er plottet i Figur 9.2.



Figur 9.2: BER av  $M$ -AM modulasjon over en Rayleigh fading kanal (ligning (9.3) for  $m = 1$ ).

## 9.2 $M$ -PSK

### 9.2.1 SER

Løser man (8.3) med (7.20) og (8.4) innsatt, og med hjelp av [1]<sup>5</sup> kan man oppnå lukket-form uttrykket:

$$\begin{aligned}
 \text{SER}_{M\text{-PSK}}^{\text{fading}} &= \frac{M-1}{M} - \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k\bar{\gamma} \sin^2(\pi/M)}{m + k\bar{\gamma} \sin^2(\pi/M)}} \\
 &\times \left\{ \left( \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \alpha \right) \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{2\ell}{\ell} \left( \frac{m}{4(m + k\bar{\gamma} \sin^2(\pi/M))} \right)^\ell \right. \\
 &\quad \left. + \sin(\tan^{-1} \alpha) \sum_{\ell=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{\ell} \left[ \left( \frac{m}{m + k\bar{\gamma} \sin^2(\pi/M)} \right)^\ell \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times T_{j\ell} [\cos(\tan^{-1} \alpha)]^{2(\ell-j)+1} \right] \right\}, \quad (9.4)
 \end{aligned}$$

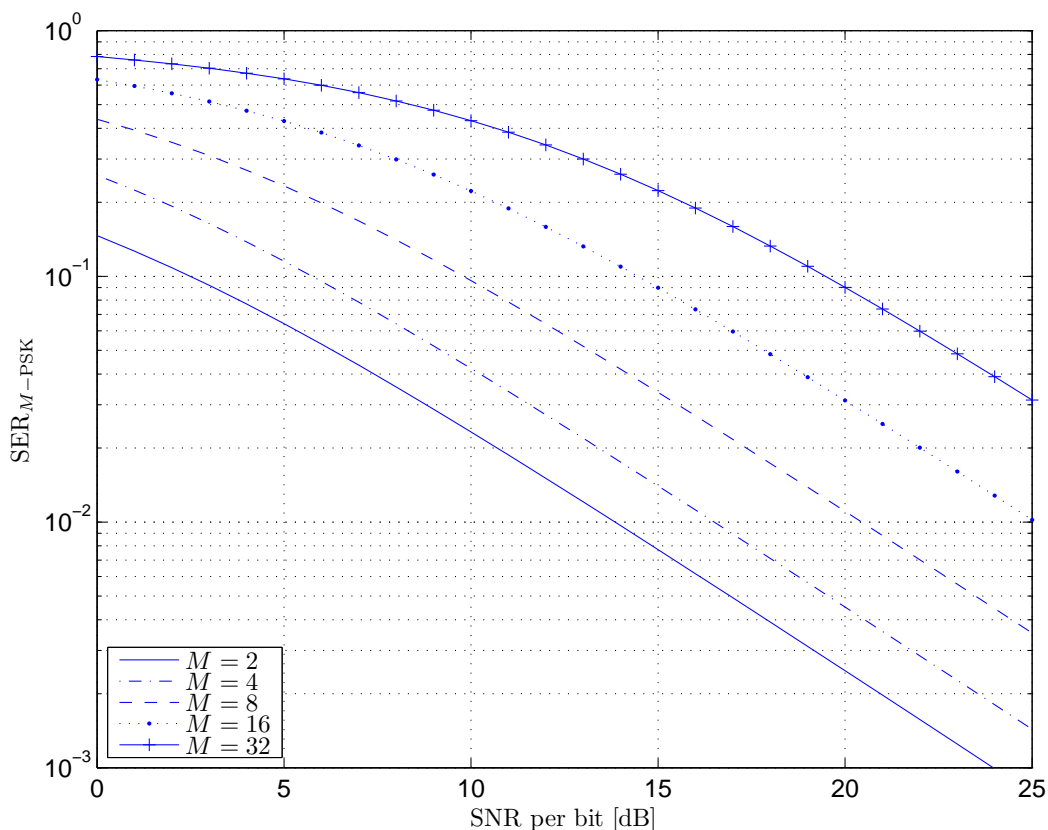
<sup>5</sup>Det er som kjent at effektivt SNR etter maximum ratio combining av  $m$  uavhengige antenner, hvor variasjonen av mottatt signal i hver av dem er Rayleigh fordelt, er det samme som SNR i en Nakagami- $m$  modell. Det er nettopp denne observasjonen som blir brukt slik at resultater i [1] kan anvendes her.



hvor

$$\alpha \triangleq \sqrt{\frac{k\bar{\gamma} \sin^2(\pi/M)}{m + k\bar{\gamma} \sin^2(\pi/M)}} \cot \frac{\pi}{M}.$$

Dette gjelder for heltallig verdier av  $m$ . Det er lett å se at for Rayleigh fading ( $m = 1$ ) og  $M = 2$  er (9.4) og (9.2) identiske. Dette bekreftes ved sammenligning av kurven for  $M = 2$  i Figurene 9.1 og 9.3. Figur 9.3 illustrerer også SER av  $M$ -PSK for andre verdier av  $M$ .



Figur 9.3: SER for  $M$ -PSK over Rayleigh fading kanaler (ligning (9.4) for  $m = 1$ ).

## 9.2.2 BER

Eksakte resultater for BER av 4-PSK, 8-PSK og 16-PSK over Nakagami- $m$  fading kanaler kan fås ved å integrere (7.26), (7.27) og (7.28) over fading PDF i (8.4). Det vil si

$$\bar{P}_n = \int_0^{\infty} P_n f(\gamma) d\gamma. \quad (9.5)$$

Det kan vises [1] at

$$\begin{aligned}
\bar{P}_n = & \frac{1}{M} + \frac{1}{2\pi} \beta_U \left\{ \left( \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \alpha_U \right) \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{2\ell}{\ell} \left( \frac{1}{4(1 + \mu_U^2)} \right)^\ell \right. \\
& \left. + \sin(\tan^{-1} \alpha_U) \sum_{\ell=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{\ell} \frac{T_{j\ell}}{(1 + \mu_U^2)^\ell} [\cos(\tan^{-1} \alpha_U)]^{2(\ell-j)+1} \right\} \\
& - \frac{1}{2\pi} \beta_L \left\{ \left( \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \alpha_L \right) \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{2\ell}{\ell} \left( \frac{1}{4(1 + \mu_L^2)} \right)^\ell \right. \\
& \left. + \sin(\tan^{-1} \alpha_L) \sum_{\ell=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{\ell} \frac{T_{j\ell}}{(1 + \mu_L^2)^\ell} [\cos(\tan^{-1} \alpha_L)]^{2(\ell-j)+1} \right\}, \quad (9.6)
\end{aligned}$$

hvor

$$\mu_L \triangleq \sqrt{\frac{k\bar{\gamma}}{m}} \sin \frac{(2n-1)\pi}{M} \quad \beta_L \triangleq \frac{\mu_L}{\sqrt{1 + \mu_L^2}} \quad \alpha_L \triangleq \beta_L \cot \frac{(2n-1)\pi}{M} \quad (9.7a)$$

$$\mu_U \triangleq \sqrt{\frac{k\bar{\gamma}}{m}} \sin \frac{(2n+1)\pi}{M} \quad \beta_U \triangleq \frac{\mu_U}{\sqrt{1 + \mu_U^2}} \quad \alpha_U \triangleq \beta_U \cot \frac{(2n+1)\pi}{M}. \quad (9.7b)$$

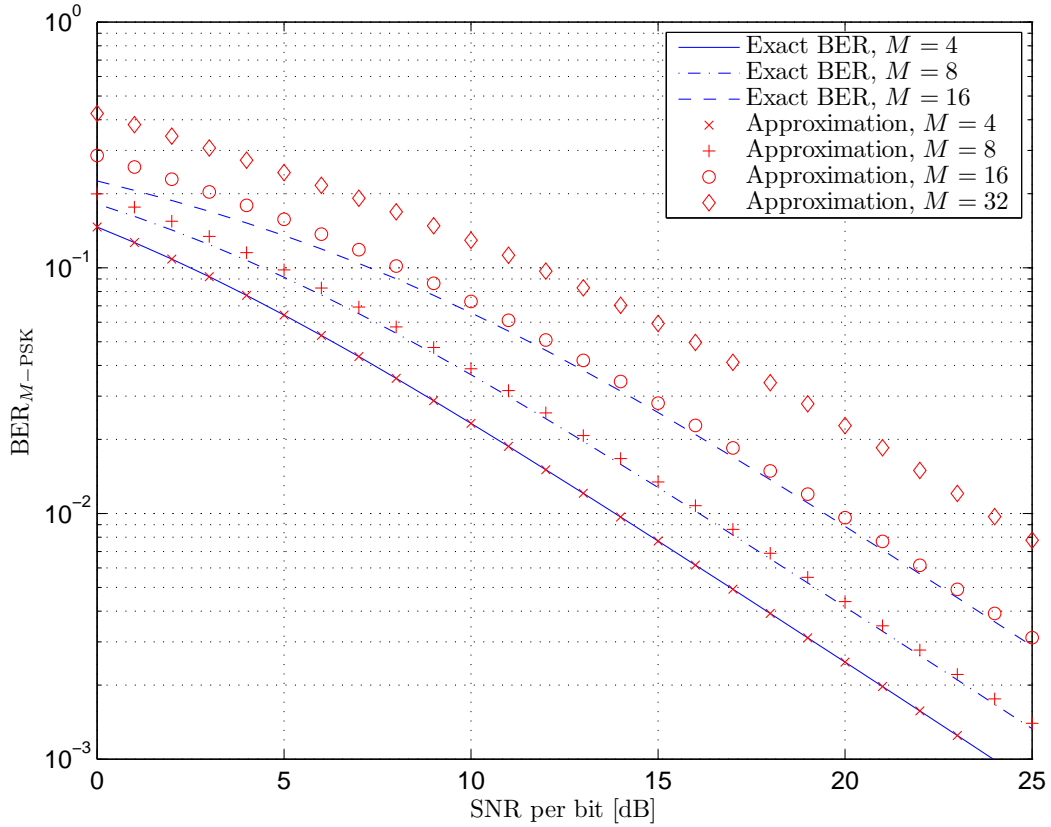
Disse  $\bar{P}_n$  (istedet for  $P_n$ ) brukes da i (7.26), (7.27) og (7.28) til å finne BER for 4-PSK, 8-PSK og 16-PSK over Nakagami- $m$  ( $m$  heltallig) fading kanaler.

Igjen er  $\text{BER}_{2\text{-PSK}} = \text{BER}_{4\text{-PSK}}$ . For de andre  $M$ -PSK modulasjoner ( $M > 16$ ) kan man midle approksimasjonen i (7.29) over Nakagami- $m$  PDF for å få BER over fading kanaler. Erstatter man  $\mathcal{E}_b/N_0$  i (7.29) med  $\gamma$  og skriver man ut integralet får man:

$$\begin{aligned}
\text{BER}_{M\text{-PSK}}^{\text{fading}} & \approx \int_0^\infty \frac{2}{\max(k, 2)} \sum_{l=1}^{\max(M/4, 1)} Q \left( \sqrt{2k\gamma} \sin \frac{(2l-1)\pi}{M} \right) f(\gamma) d\gamma \\
& = \frac{2}{\pi \max(k, 2)} \sum_{l=1}^{\max(M/4, 1)} \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \exp \left( -\frac{k\gamma}{\sin^2 \theta} \sin^2 \frac{(2l-1)\pi}{M} \right) f(\gamma) d\gamma d\theta \\
& = \frac{2}{\pi \max(k, 2)} \sum_{l=1}^{\max(M/4, 1)} \int_0^{\pi/2} \mathcal{M}_\gamma \left( -\frac{k}{\sin^2 \theta} \sin^2 \frac{(2l-1)\pi}{M} \right) d\theta \\
& = \frac{1}{\max(k, 2)} \sum_{l=1}^{\max(M/4, 1)} \left[ 1 - \sqrt{\frac{c}{1+c}} \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{2\ell}{\ell} \left( \frac{1}{4(1+c)} \right)^\ell \right], \quad (9.8)
\end{aligned}$$

for  $m$  heltallig hvor  $c = (k\bar{\gamma}/m) \sin^2[(2l-1)\pi/M]$ .

Eksakt BER sammen med approksimasjoner er tegnet i Figur 9.4. Kurven for  $M = 2$  er ikke tatt med her siden den vil falle sammen med den for  $M = 4$ . Her ser vi at (9.8) er en god approksimasjon av BER av  $M$ -PSK signaler. Siden denne er enklere, vil den kanskje være aktuelt å bruke til BER evaluering av  $M$ -PSK modulasjon.



Figur 9.4: Eksakt og approksimasjon av BER for  $M$ -PSK over Rayleigh fading kanal.

### 9.3 $M$ -QAM

#### 9.3.1 SER

##### Kvadratiske QAM konstellasjoner

For  $m$  heltallig og kvadratiske QAM konstellasjoner kan SER beregnes ved å midle (7.31) over Nakagami PDF. Det vil si

$$\begin{aligned}
 \text{SER}_{M\text{-QAM}}^{\text{fading}} &= \frac{4}{\pi} \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{3k\gamma}{2(M-1)\sin^2(\theta)}\right) d\theta f(\gamma) d\gamma \\
 &\quad - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}}\right)^2 \int_0^\infty \int_0^{\pi/4} \exp\left(-\frac{3k\gamma}{2(M-1)\sin^2(\theta)}\right) d\theta f(\gamma) d\gamma \\
 &= \frac{4}{\pi} \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} \int_0^{\pi/2} \mathcal{M}_\gamma\left(-\frac{3k}{2(M-1)\sin^2(\theta)}\right) d\theta \\
 &\quad - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}}\right)^2 \int_0^{\pi/4} \mathcal{M}_\gamma\left(-\frac{3k}{2(M-1)\sin^2(\theta)}\right) d\theta. \tag{9.9}
 \end{aligned}$$

Med hjelp av (8.8) og (8.11) får vi<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} \text{SER}_{M\text{-QAM}}^{\text{fading}} = & \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} \left[ 2 - 2\mu \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{2\ell}{\ell} \xi^\ell \right] \\ & - \left( \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} \right)^2 \left[ 1 - \frac{4}{\pi} \mu \left\{ \tan^{-1} \left( \frac{1}{\mu} \right) \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{2\ell}{\ell} \xi^\ell \right. \right. \\ & \left. \left. - \sin(\tan^{-1} \mu) \sum_{\ell=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{\ell} (4\xi)^\ell T_{j\ell} [\cos(\tan^{-1} \mu)]^{2(\ell-j)+1} \right\} \right] \end{aligned} \quad (9.10)$$

hvor

$$\mu = \sqrt{\frac{3k\bar{\gamma}}{2m(M-1) + 3k\bar{\gamma}}} \quad (9.11a)$$

$$\xi = \frac{m(M-1)}{4m(M-1) + 6k\bar{\gamma}}. \quad (9.11b)$$

Resultatet er plottet i Figur 9.5.

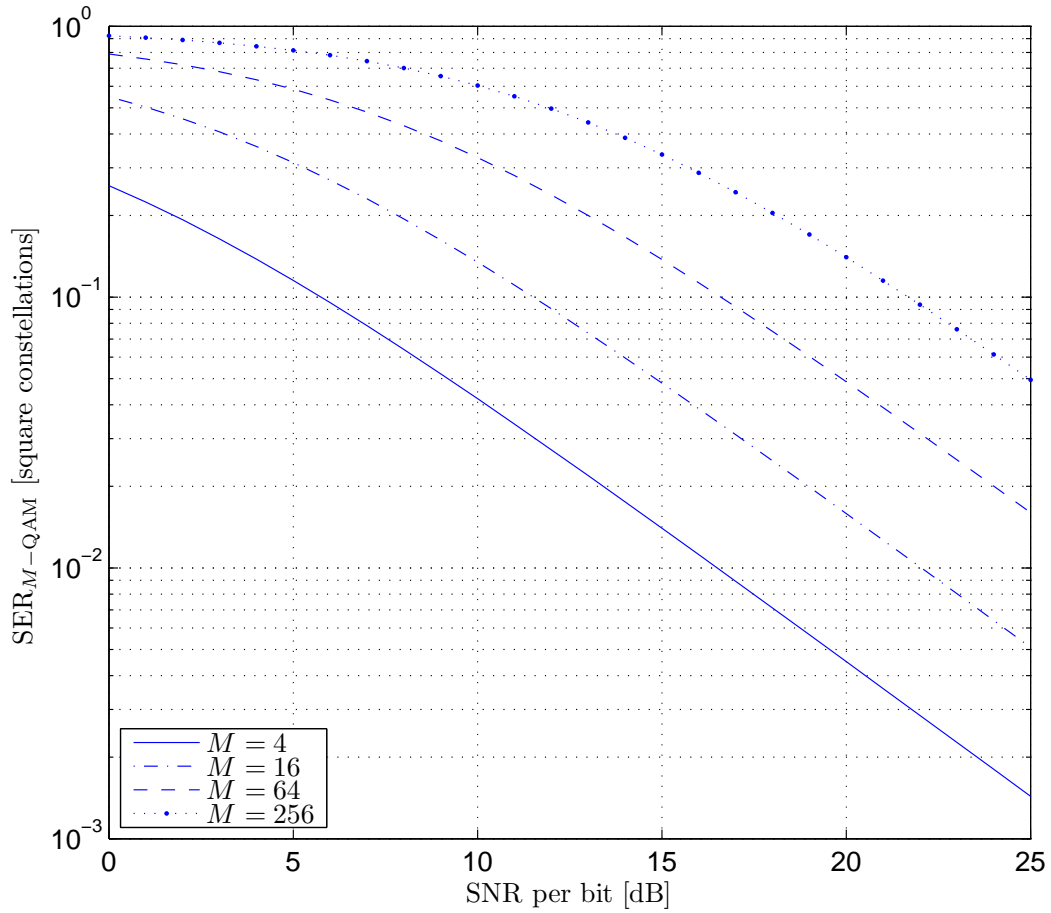
### Rektangulære QAM konstellasjoner

Tilsvarende er SER for rektangulære QAM konstellasjonerupper bounded ved å midle (7.32) over Nakagami PDF. Resultatet blir

$$\begin{aligned} \text{SER}_{M\text{-QAM}}^{\text{fading}} \leq & \int_0^\infty 4Q \left( \sqrt{\frac{3k\gamma}{M-1}} \right) f(\gamma) d\gamma - \int_0^\infty 4Q^2 \left( \sqrt{\frac{3k\gamma}{M-1}} \right) f(\gamma) d\gamma \\ = & \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \mathcal{M}_\gamma \left( -\frac{3k}{2(M-1)\sin^2\theta} \right) d\theta - \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} \mathcal{M}_\gamma \left( -\frac{3k}{2(M-1)\sin^2\theta} \right) d\theta \\ = & 1 - 2\mu \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{2\ell}{\ell} \xi^\ell + \frac{4}{\pi} \mu \left\{ \tan^{-1} \left( \frac{1}{\mu} \right) \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{2\ell}{\ell} \left( \frac{m(M-1)}{4m(M-1) + 6k\bar{\gamma}} \right)^\ell \right. \\ & \left. - \sin(\tan^{-1} \mu) \sum_{\ell=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{\ell} \left( \frac{2m(M-1)}{2m(M-1) + 3k\bar{\gamma}} \right)^\ell T_{j\ell} [\cos(\tan^{-1} \mu)]^{2(\ell-j)+1} \right\}, \end{aligned} \quad (9.12)$$

og den er plottet i Figur 9.6.

<sup>6</sup>Når man leser i annen litteratur er det verdt å merke seg at  $\tan^{-1}(\mu) = \pi/2 - \tan^{-1}(1/\mu)$  for  $\mu > 0$  (her er  $\mu$  alltid større enn 0).



Figur 9.5: SER for kvadratiske QAM konstellasjoner over en Rayleigh fading kanal (ligning (9.10)).

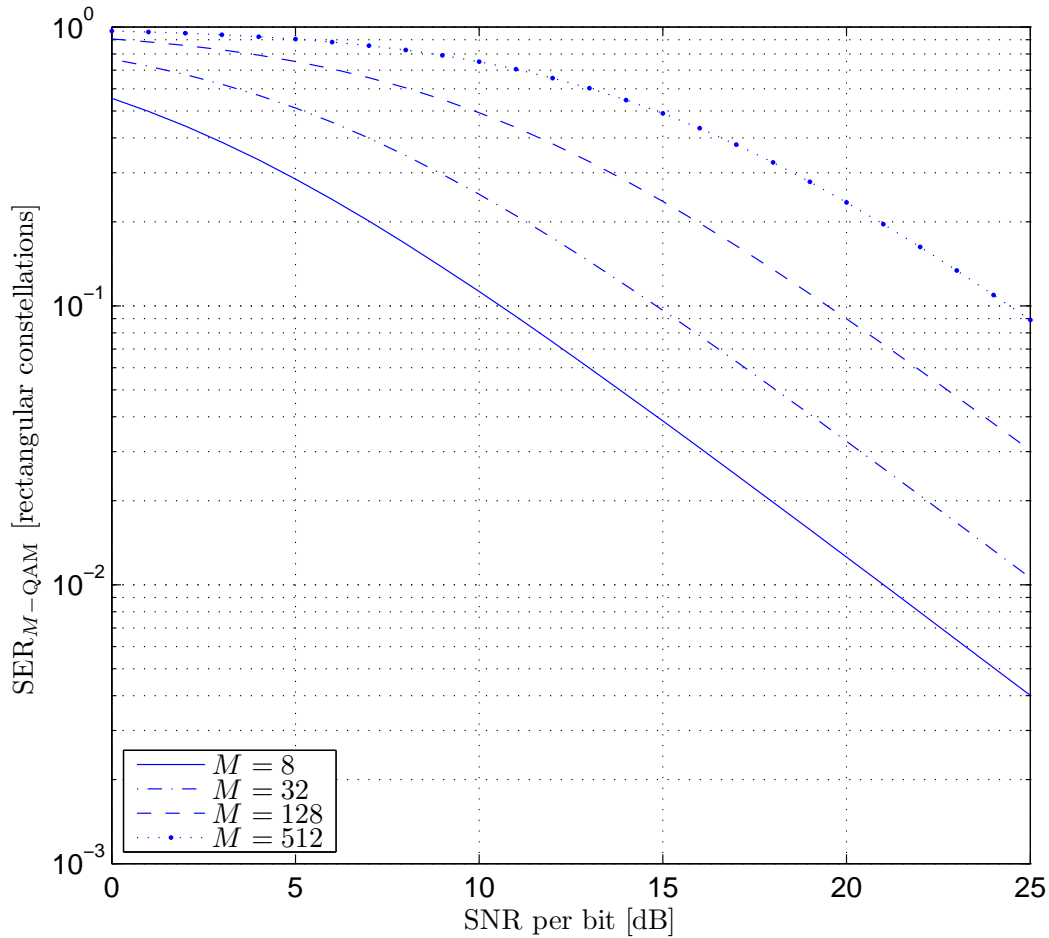
### 9.3.2 BER

#### Kvadratisk QAM

$$\text{BER}_{M\text{-QAM}}^{\text{fading}} = \frac{2}{\sqrt{M} \log_2 \sqrt{M}} \sum_{n=1}^{\log_2 \sqrt{M}} \underbrace{\int_0^{\infty} \text{BER}_n f(\gamma) d\gamma}_{\overline{\text{BER}}_n}. \quad (9.13)$$

Erstatter vi  $\mathcal{E}_b/N_0$  i (7.36) med  $\gamma$  er  $\overline{\text{BER}}_n$

$$\begin{aligned} \overline{\text{BER}}_n = & \sum_{i=0}^{(1-2^{-n})\sqrt{M}-1} (-1)^{\lfloor (i2^{n-1})/\sqrt{M} \rfloor} \left( 2^{n-1} - \left\lfloor \frac{i2^{n-1}}{\sqrt{M}} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right) \\ & \times \int_0^{\infty} Q \left( (2i+1) \sqrt{\gamma \frac{3k}{M-1}} \right) f(\gamma) d\gamma. \end{aligned} \quad (9.14)$$



Figur 9.6: Approsimasjon av SER for rektangulære QAM konstellasjoner over en Rayleigh fading kanal (ligning (9.12)). Det er plottet for når avstanden mellom symbolene er lik i både horisontale og vertikale retninger (dvs.  $\eta = 1$ ).

Ved hjelp av (8.8) får vi

$$\overline{\text{BER}}_n = \sum_{i=0}^{(1-2^{-n})\sqrt{M}-1} (-1)^{\lfloor (i2^{n-1})/\sqrt{M} \rfloor} \left( 2^{n-1} - \left\lfloor \frac{i2^{n-1}}{\sqrt{M}} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right) \left[ \frac{1}{2} - \frac{\mu}{2} \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{2\ell}{\ell} \left( \frac{1-\mu^2}{4} \right)^\ell \right], \quad (9.15)$$

hvor  $\mu$  nå er:

$$\mu = \sqrt{\frac{3k\bar{\gamma}(2i+1)^2}{2m(M-1) + 3k\bar{\gamma}(2i+1)^2}}.$$

På denne måten kan  $\text{BER}_{M\text{-QAM}}^{\text{fading}}$  for kvadratiske QAM konstellasjoner regnes ut med

$$\text{BER}_{M\text{-QAM}}^{\text{fading}} = \frac{1}{\log_2 \sqrt{M}} \sum_{n=1}^{\log_2 \sqrt{M}} \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=0}^{(1-2^{-n})\sqrt{M}-1} (-1)^{\lfloor (i2^{n-1})/\sqrt{M} \rfloor} \left( 2^{n-1} - \left\lfloor \frac{i2^{n-1}}{\sqrt{M}} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right) \times \left[ 1 - \mu \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{2\ell}{\ell} \left( \frac{1-\mu^2}{4} \right)^\ell \right]. \quad (9.16)$$

Hvis vi istedet bruker approksimasjonen i (7.37) kan BER av kvadratisk QAM over en fading kanal approksimeres med

$$\begin{aligned} \text{BER}_{M\text{-QAM}}^{\text{fading}} &\approx \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} \frac{4}{k} \sum_{i=0}^{\sqrt{M}/2-1} \int_0^\infty Q\left( (2i+1) \sqrt{\gamma \frac{3k}{M-1}} \right) f(\gamma) d\gamma \\ &= \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} \frac{2}{k} \sum_{i=0}^{\sqrt{M}/2-1} \left[ 1 - \mu \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{2\ell}{\ell} \left( \frac{1-\mu^2}{4} \right)^\ell \right] \end{aligned} \quad (9.17)$$

Approksimasjonen er plottet sammen med eksakte BER i Figur 9.7.

### Rektangulær QAM

$$\text{BER}_{M\text{-QAM}}^{\text{fading}} = \frac{1}{\log_2(IJ)} \left( \underbrace{\sum_{n=1}^{\log_2 I} \int_0^\infty \text{BER}_n^I f(\gamma) d\gamma}_{\overline{\text{BER}}_n^I} + \sum_{l=1}^{\log_2 J} \underbrace{\int_0^\infty \text{BER}_l^J f(\gamma) d\gamma}_{\overline{\text{BER}}_l^J} \right). \quad (9.18)$$

På samme måte som for kvadratisk QAM kan  $\overline{\text{BER}}_n^I$  og  $\overline{\text{BER}}_l^J$  skrives som

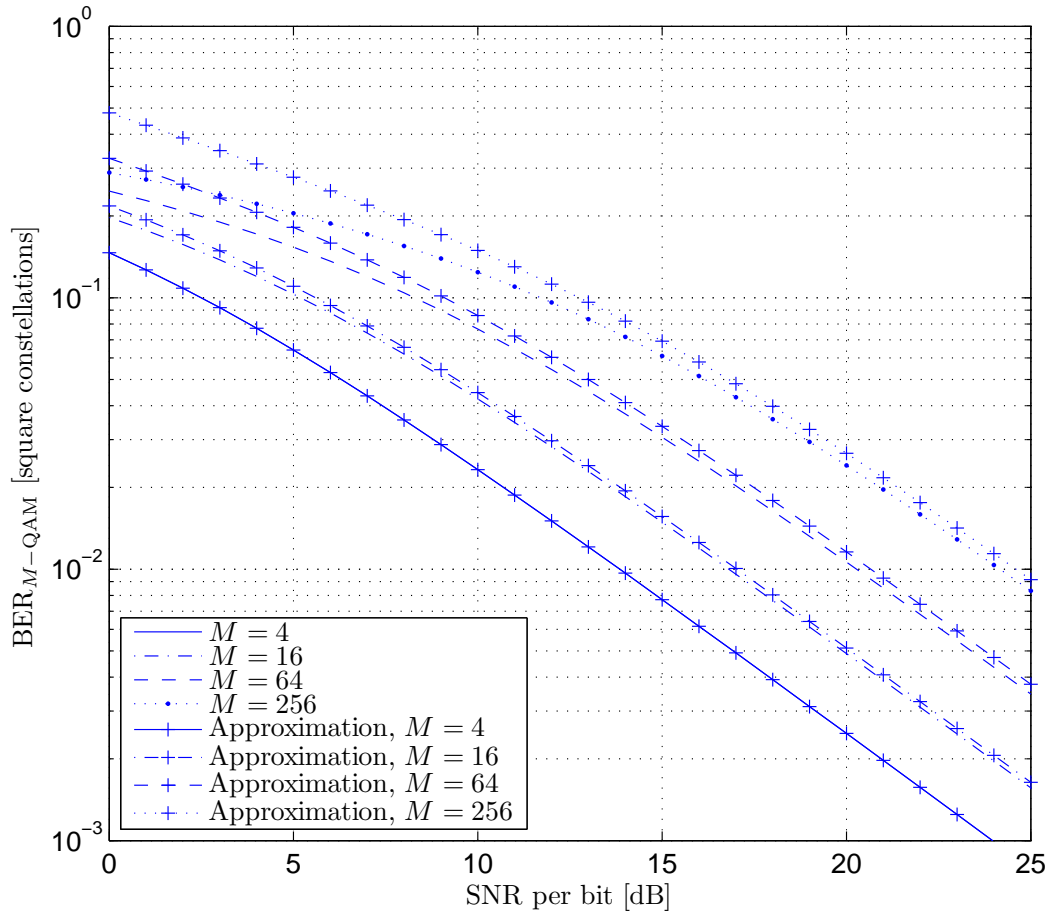
$$\begin{aligned} \overline{\text{BER}}_n^I &= \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{(1-2^{-n})I-1} \left\{ (-1)^{\lfloor (i2^{n-1})/I \rfloor} \left( 2^{n-1} - \left\lfloor \frac{i2^{n-1}}{I} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left[ 1 - \mu_1 \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{2\ell}{\ell} \left( \frac{1-\mu_1^2}{4} \right)^\ell \right] \right\}, \end{aligned} \quad (9.19)$$

hvor  $\mu_1 = \sqrt{c_1/(1+c_1)}$  med

$$c_1 = \frac{\bar{\gamma} 6(2i+1)^2 \log_2(IJ)}{2m[(I^2-1) + \eta^2(J^2-1)]}, \quad (9.20)$$

og

$$\begin{aligned} \overline{\text{BER}}_l^J &= \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{(1-2^{-l})J-1} \left\{ (-1)^{\lfloor (j2^{l-1})/J \rfloor} \left( 2^{l-1} - \left\lfloor \frac{j2^{l-1}}{J} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left[ 1 - \mu_2 \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{2\ell}{\ell} \left( \frac{1-\mu_2^2}{4} \right)^\ell \right] \right\}, \end{aligned} \quad (9.21)$$



Figur 9.7: Eksakt og approksimasjon av BER for kvadratiske QAM konstallasjoner over en Rayleigh fading kanal (ligning (9.16) og (9.17)).

hvor  $\mu_2 = \sqrt{c_2/(1+c_2)}$

$$c_2 = \eta^2 \frac{\bar{\gamma} 6(2j+1)^2 \log_2(IJ)}{2m[(I^2-1) + \eta^2(J^2-1)]}. \quad (9.22)$$

Innsetting av (9.19) og (9.21) inn i (9.18) gir BER over en Nakagami- $m$  fading kanal.

Når forholdet  $\eta = 1$  blir  $c_1 = c_2$  og dermed  $\mu_1 = \mu_2$ . Videre, når  $\eta = 1$  og  $I = J = \sqrt{M}$ , vil (9.18) reduseres til (9.16).

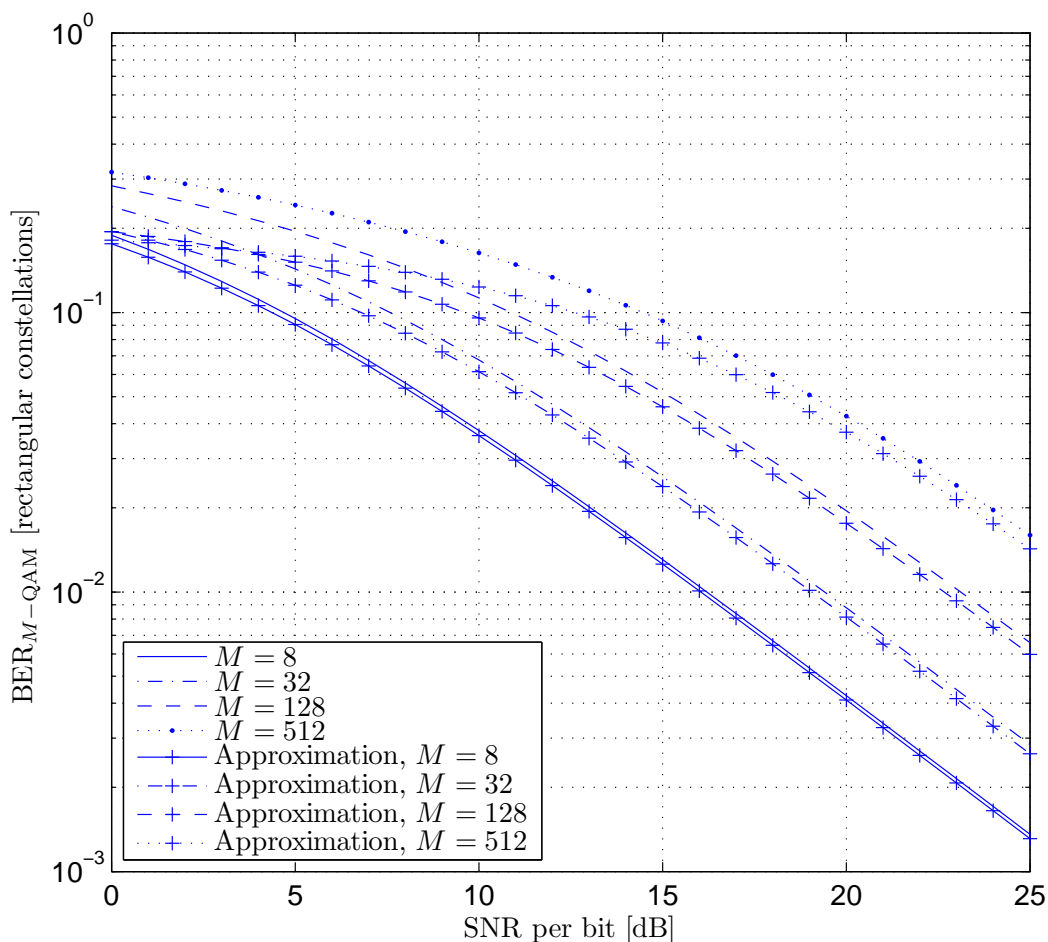
Tilsvarende kan BER approksimeres som

$$\text{BER}_{M\text{-QAM}}^{\text{fading}} \approx \frac{1}{\log_2(IJ)} \left\{ \frac{I-1}{I} \left[ 1 - \mu_1 \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{2\ell}{\ell} \left( \frac{1-\mu_1^2}{4} \right)^\ell \right] + \frac{J-1}{J} \left[ 1 - \mu_2 \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{2\ell}{\ell} \left( \frac{1-\mu_2^2}{4} \right)^\ell \right] \right\}, \quad (9.23)$$

Her ser vi at denne approksimasjonen reduseres til første ledd i summasjonen i (9.17) når  $I = J = \sqrt{M}$  og  $d_I = d_J$  (altså  $\eta = 1$ ).



Både approksimasjonen og eksakte BER kurver er plottet i Figur 9.8.



Figur 9.8: Eksakt og approksimasjon av BER for rektangulære QAM konstellasjoner over en Rayleigh fading kanal (likning (9.18) og (9.23)).

## 9.4 M-FSK

### 9.4.1 Eksakt SER for vilkårlige $M$

For å finne SER over fading kanaler trenger vi å utføre integralet i (8.3). Det vil si

$$\begin{aligned} \text{SER}_{M\text{-FSK}}^{\text{fading}} &= \int_0^\infty \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty Q(-q - \sqrt{2k\gamma})^{M-1} \exp\left(-\frac{q^2}{2}\right) dq \right] f(\gamma) d\gamma \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \left[ 1 - (1 - Q(y))^{M-1} \right] \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(y - \sqrt{2k\gamma})^2}{2}\right) f(\gamma) d\gamma dy. \end{aligned} \quad (9.24)$$

## 9.4.2 Noen tilfeller som gir lukket-form resultater

### Binær FSK

SER og BER for ortogonal *binær* FSK over Nakagami- $m$  fading kanaler kan fås ved å integrere (8.3) med (7.48) innsatt. Med hjelp av (8.7) og (8.8) får vi

$$\begin{aligned} \text{SER}_{2\text{-FSK}}^{\text{fading}} = \text{BER}_{2\text{-FSK}}^{\text{fading}} &= \int_0^\infty Q(\sqrt{\gamma}) f(\gamma) d\gamma \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\mu}{2} \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{2\ell}{\ell} \left(\frac{1-\mu^2}{4}\right)^\ell \end{aligned} \quad (9.25)$$

for  $m$  heltallig i en Nakagami- $m$  modell, hvor  $\mu = \sqrt{\bar{\gamma}/(2m + \bar{\gamma})}$ . Resultatet ligner på det for BPSK i (7.45) bortsett fra faktoren 2 foran parameteren  $m$ . Dette er i samsvar med en SNR økning på 3 dB i sammenligningen vi gjorde for gaussiske kanaler.

### 3-FSK og 4-FSK

Et enkelt lukket-form uttrykk for Nakagami- $m$  modell er vanskelig å oppnå. Imidlertid, for Rayleigh fading (når  $m = 1$ ) får vi følgende uttrykk [5]:

$$\text{SER}_{3\text{-FSK}}^{\text{fading}} = \frac{2}{3} - \sqrt{\frac{k\bar{\gamma}}{2+k\bar{\gamma}}} + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k\bar{\gamma}}{2+k\bar{\gamma}}} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{3(2+k\bar{\gamma})}{k\bar{\gamma}}} \right). \quad (9.26)$$

og

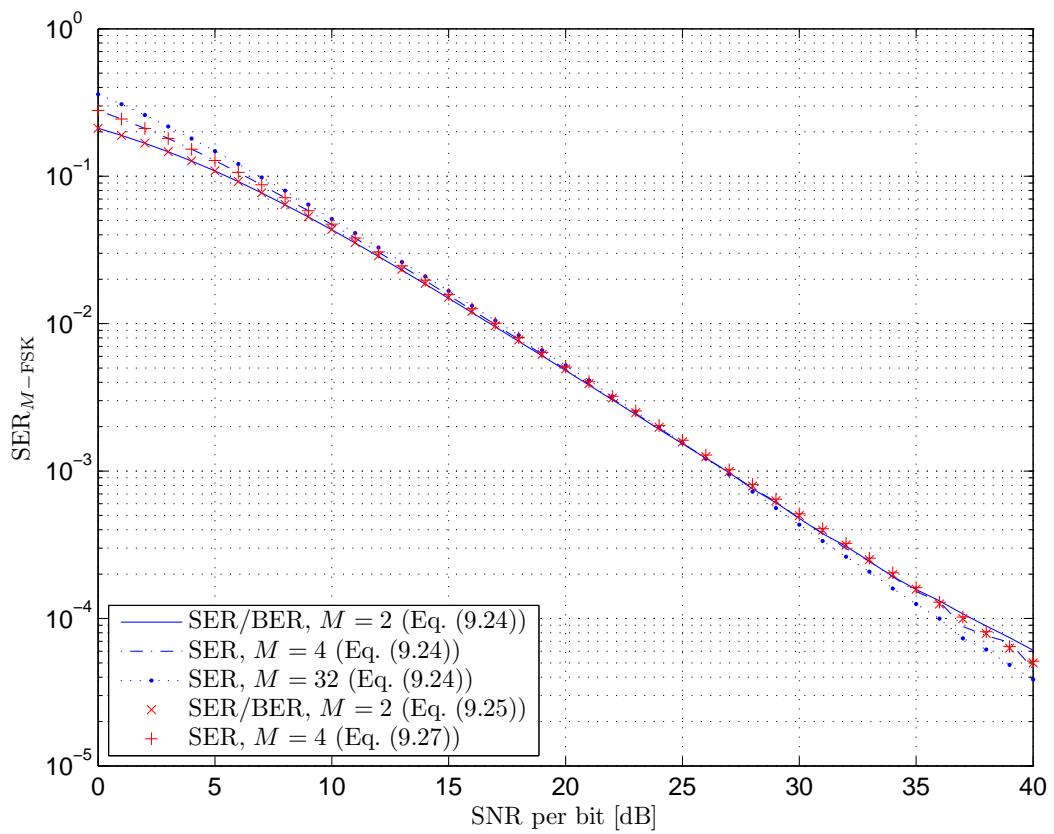
$$\text{SER}_{4\text{-FSK}}^{\text{fading}} = \frac{3}{4} - \frac{3}{2\pi} \sqrt{\frac{k\bar{\gamma}}{2+k\bar{\gamma}}} \left[ \pi - \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{3(2+k\bar{\gamma})}{k\bar{\gamma}}} \right) - \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{2+k\bar{\gamma}}{4+3k\bar{\gamma}}} \right) \right] \quad (9.27)$$

for henholdsvis 3-FSK og 4-FSK.

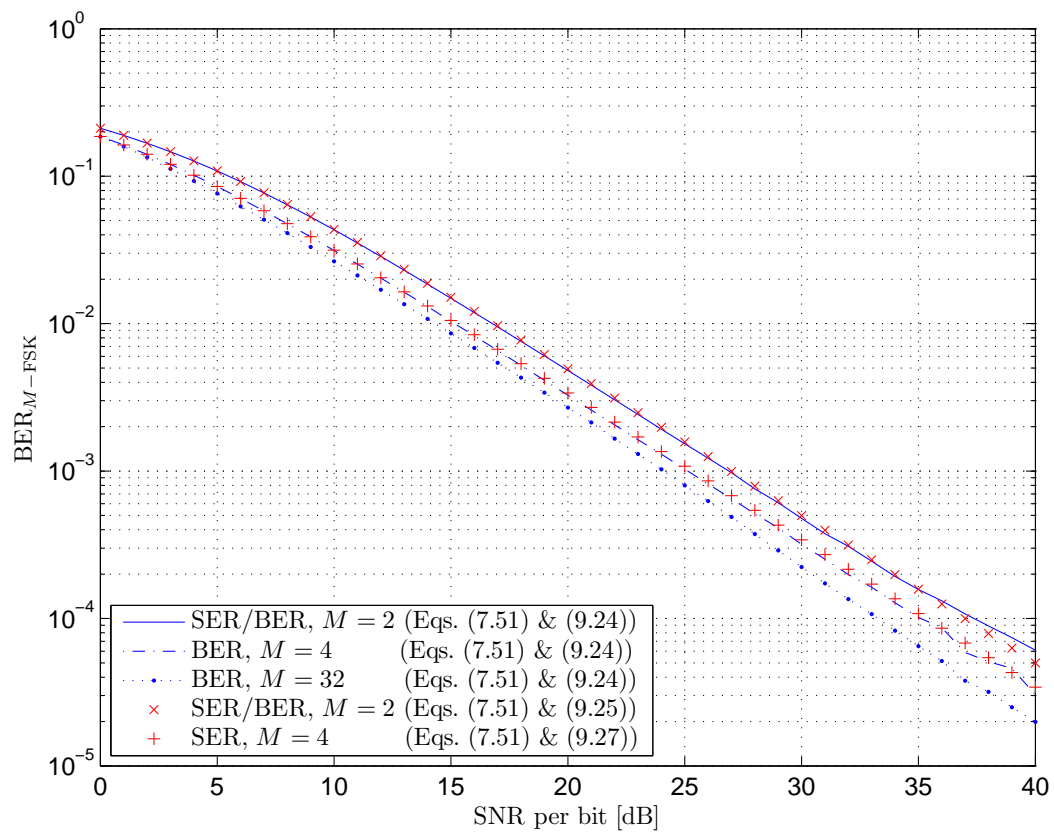
Ligningene (9.25) og (9.27) sammen med (9.24) er plottet i Figur 9.9.

### 9.4.3 BER

Relasjonen (7.51) er fortsatt gyldig for beregning av  $\text{BER}_{M\text{-FSK}}$  over fading kanaler, og kurvene er vist i Figur 9.10.



Figur 9.9: SER for  $M$ -FSK over Rayleigh fading kanal.

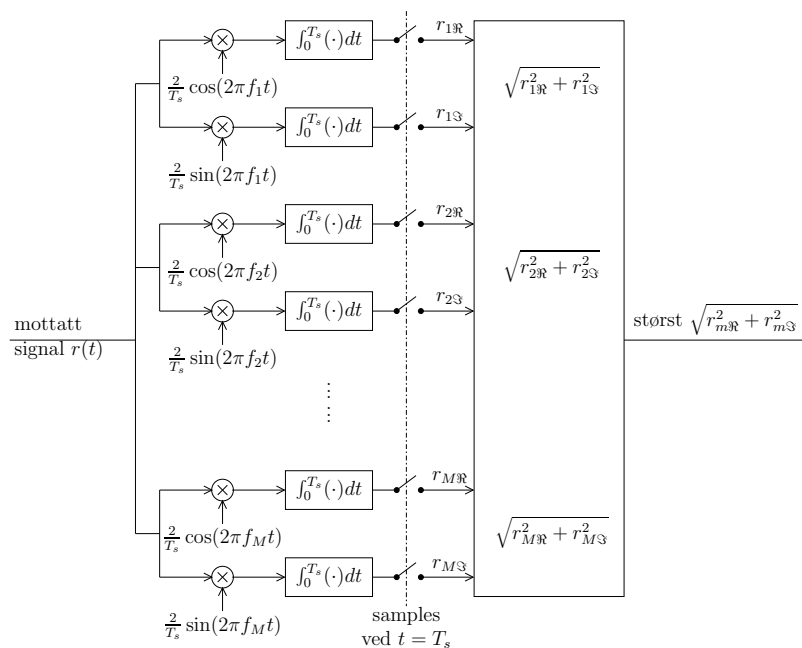


Figur 9.10: BER for  $M$ -FSK over Rayleigh fading kanal.

## 10 Inkoherent kommunikasjon

Til nå har vi diskutert SER og BER for koherent kommunikasjon der informasjon om bære­bøl­gens fase er eksakt kjent hos mottakeren. Denne antagelsen er ikke alltid gyldig siden lokale oscilla­torer hos sender og mottaker kan være ute av synkronisering. Propagasjonsforsinkelsen kan også forårsake store faseskift.

Alle signaleringsteknikker som baserer seg på at fasen til bære­bøl­gen ikke er kjent kalles for inkoherent kommunikasjon, og inkoherent deteksjon er betegnelsen som brukes når deteksjonen ut­føres uten kjennskap til bære­bøl­gens fase. Selv uten denne kunnskapen kan man fortsatt detektere sendte signaler gitt at passende modulasjonstyper ble brukt hos senderen. I slike tilfeller blir fasen betraktet som en stokastisk variabel og dette danner grunnlaget for beregning av optimale detekto­rer/demodulatorer. Hvordan en optimal demodulator/detektor fungerer er vist i Figur 10.1



Figur 10.1: Optimal demodulator/detektor i inkoherent kommunikasjon.

Av de mest vanlige modulasjonstypene er  $M$ -FSK modulasjon det mest logiske valget. Dette er fordi AM,<sup>7</sup> PSK og QAM signaler er designet til å bruke blant annet fasen til bære­bøl­gen. Da kan ikke deteksjonen utføres riktig uten kjennskap til denne fasen.

<sup>7</sup>AM er analogt med BPSK

## 10.1 SER over gaussiske kanaler

Når  $S_m(t)$  var sendt, blir mottatt signal

$$r(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{T_s}} \cos(2\pi f_m t + \phi) + n(t), \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (10.1)$$

hvor  $\phi$  er den ukjente fasen. Denne er antatt å være uniform fordelt stokastisk variabel over  $2\pi$ . Når fasen  $\phi$  ikke er kjent som i dette tilfellet blir mottatt signal demodulert med følgende sett av  $2M$  ortonormale funksjoner

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos(2\pi f_1 t), \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos(2\pi f_2 t), \dots, \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos(2\pi f_M t) \\ & \sqrt{\frac{2}{T_s}} \sin(2\pi f_1 t), \sqrt{\frac{2}{T_s}} \sin(2\pi f_2 t), \dots, \sqrt{\frac{2}{T_s}} \sin(2\pi f_M t). \end{aligned}$$

Demodulasjon gir følgende koordinater

$$x_m = \int_0^{T_s} r(t) \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos(2\pi f_i t) dt = \begin{cases} n_{xm}, & m \neq i \\ \sqrt{\mathcal{E}} \cos(\phi) + n_{xi}, & m = i \end{cases} \quad (10.2a)$$

$$y_m = \int_0^{T_s} r(t) \sqrt{\frac{2}{T_s}} \sin(2\pi f_i t) dt = \begin{cases} n_{ym}, & m \neq i \\ -\sqrt{\mathcal{E}} \sin(\phi) + n_{yi}, & m = i \end{cases} \quad (10.2b)$$

hvor  $n_{xm}$  og  $n_{ym}$  er uavhengige gaussiske variable med null i middel og varians lik  $N_0/2$ . Fra Figur 10.1 og (10.2) er det klart at en riktig desisjon når  $S_m(t)$  er sendt hvis og bare hvis følgende kriteriet

$$\sqrt{x_m^2 + y_m^2} > \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \quad (10.3)$$

er oppfylt for alle  $m \neq i$ . Gitt at  $S_m(t)$  var sendt er simultan PDF av  $x_m$  og  $y_m$

$$p_m(x_m, y_m | \phi) = \frac{1}{\pi N_0} \exp\left(-\frac{(x_m - \sqrt{\mathcal{E}} \cos(\phi))^2 + (y_m + \sqrt{\mathcal{E}} \sin(\phi))^2}{N_0}\right) \quad (10.4)$$

Videre er

$$\begin{aligned} p_m(x_m, y_m) &= \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \frac{1}{2\pi} p_m(x_m, y_m | \phi) d\phi \\ &= \frac{1}{\pi N_0} \exp\left(-\frac{x_m^2 + y_m^2 + \mathcal{E}}{N_0}\right) \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \frac{1}{2\pi} \exp\left(\frac{2\sqrt{\mathcal{E}}}{N_0} (x_m \cos(\phi) - y_m \sin(\phi))\right) d\phi \\ &= \frac{1}{\pi N_0} \exp\left(-\frac{x_m^2 + y_m^2 + \mathcal{E}}{N_0}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{\mathcal{E}}}{N_0} \sqrt{x_m^2 + y_m^2}\right), \end{aligned} \quad (10.5)$$

hvor  $I_0(x)$  er nulte ordens modifisert Besselfunksjon.

La  $x_m = \nu_m \sqrt{N_0/2} \cos \omega_m$  og  $y_m = \nu_m \sqrt{N_0/2} \sin \omega_m$ . Ved transformasjon av stokastisk variabel får vi

$$\begin{aligned} p(\nu_m, \omega_m) &= \frac{\nu_m N_0}{2} p_m\left(\nu_m \sqrt{N_0/2} \cos \omega_m, \nu_m \sqrt{N_0/2} \sin \omega_m\right) \\ &= \frac{\nu_m}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\nu_m^2 + \frac{2\mathcal{E}}{N_0}\right)\right) I_0\left(\nu_m \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{N_0}}\right) \end{aligned} \quad (10.6)$$

som er uavhengig av  $\omega_m$ . Da er

$$p_{\nu_m}(\nu_m) = \int_0^{2\pi} p(\nu_m, \omega_m) d\omega_m = \nu_m \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\nu_m^2 + \frac{2\mathcal{E}}{N_0}\right)\right) I_0\left(\nu_m \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{N_0}}\right). \quad (10.7)$$

Når  $m \neq i$  er simultan PDF til  $x_m$  og  $y_m$  lik (10.4) og dermed ovennevnte uttrykket med  $\mathcal{E} = 0$ . Da blir PDF'en lik

$$p_{\nu_i}(\nu_i) = \nu_i \exp\left(-\frac{\nu_i^2}{2}\right), \quad i \neq m \quad (10.8)$$

Kravet for riktig desisjon er gitt i (10.3). Det er det samme som å si at  $\nu_m > \nu_i$  for alle  $i \neq m$ . Da er sannsynlighet for å gjøre riktig desisjon

$$\begin{aligned} P_{\text{korrekt}} &= P(\nu_i < \nu_m, \forall i \neq m) \\ &= \int_0^{\infty} P(\nu_i < \nu_m, \forall i \neq m | \nu_m = v) p_{\nu_m}(v) dv. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Siden  $\nu_i, i \neq m$  er statistisk uavhengige, er deres simultane PDF lik produktet av marginal PDF'ene. Da er

$$P_{\text{korrekt}} = \int_0^{\infty} [P(\nu_i < \nu_m | \nu_m = v)]^{M-1} p_{\nu_m}(v) dv \quad (10.10)$$

hvor

$$\begin{aligned} P(\nu_i < \nu_m | \nu_m = v) &= \int_0^v p_{\nu_i}(z) dz \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right). \end{aligned} \quad (10.11)$$

Med binomial rekkeutvikling gjelder følgende

$$\left(1 - \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)\right)^{M-1} = \sum_{n=0}^{M-1} (-1)^n \binom{M-1}{n} \exp\left(-\frac{nv^2}{2}\right). \quad (10.12)$$

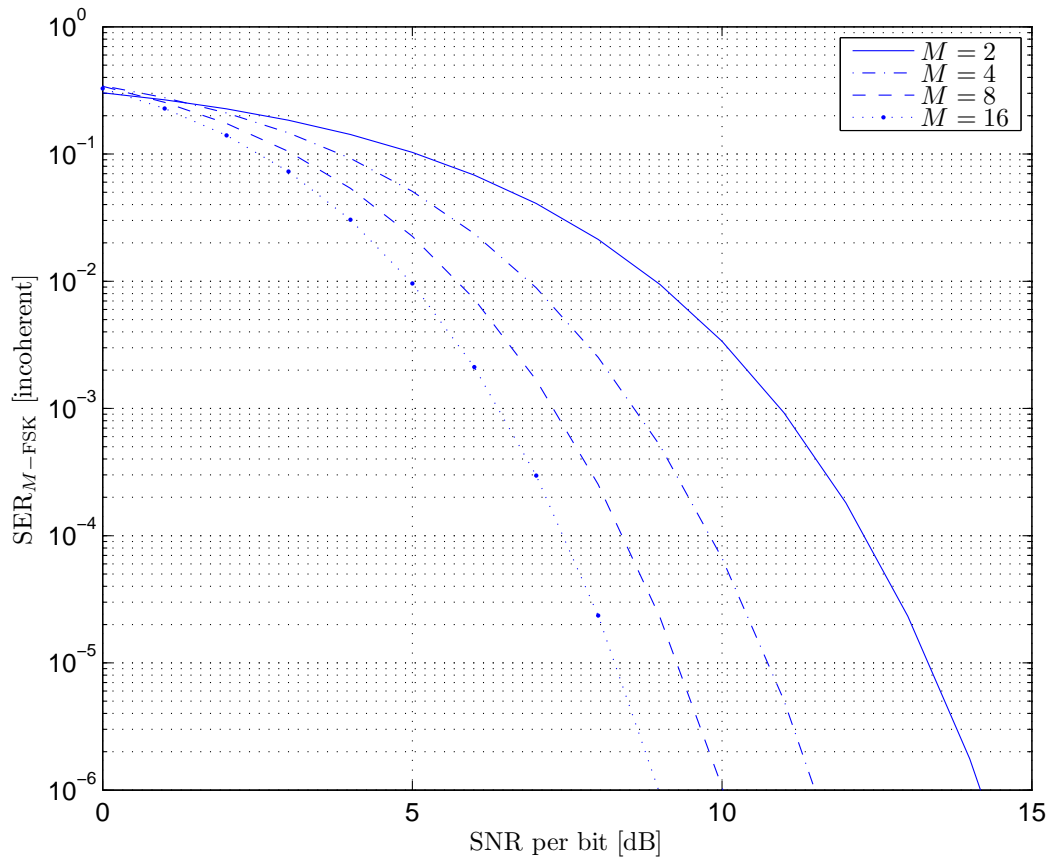
Setter vi dette inn i (10.10) og integrerer over  $v$  får vi

$$\begin{aligned} P_{\text{korrekt}} &= \sum_{n=0}^{M-1} (-1)^n \binom{M-1}{n} \frac{1}{n+1} \exp\left(-\frac{n\mathcal{E}}{N_0(n+1)}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} (-1)^n \binom{M-1}{n} \frac{1}{n+1} \exp\left(-\frac{nk\mathcal{E}_b}{N_0(n+1)}\right) \end{aligned} \quad (10.13)$$

Sannsynlighet for symbolfeil blir da  $\text{SER}_{M\text{-FSK}} = 1 - P_{\text{korrekt}}$  og den er

$$\text{SER}_{M\text{-FSK}} = \sum_{n=1}^{M-1} (-1)^{n+1} \binom{M-1}{n} \frac{1}{n+1} \exp\left(-\frac{nk\mathcal{E}_b}{N_0(n+1)}\right) \quad (10.14)$$

SER er plottet i Figur 10.2



Figur 10.2: SER for  $M$ -FSK ved inkoherent deteksjon (ligning (10.14)).

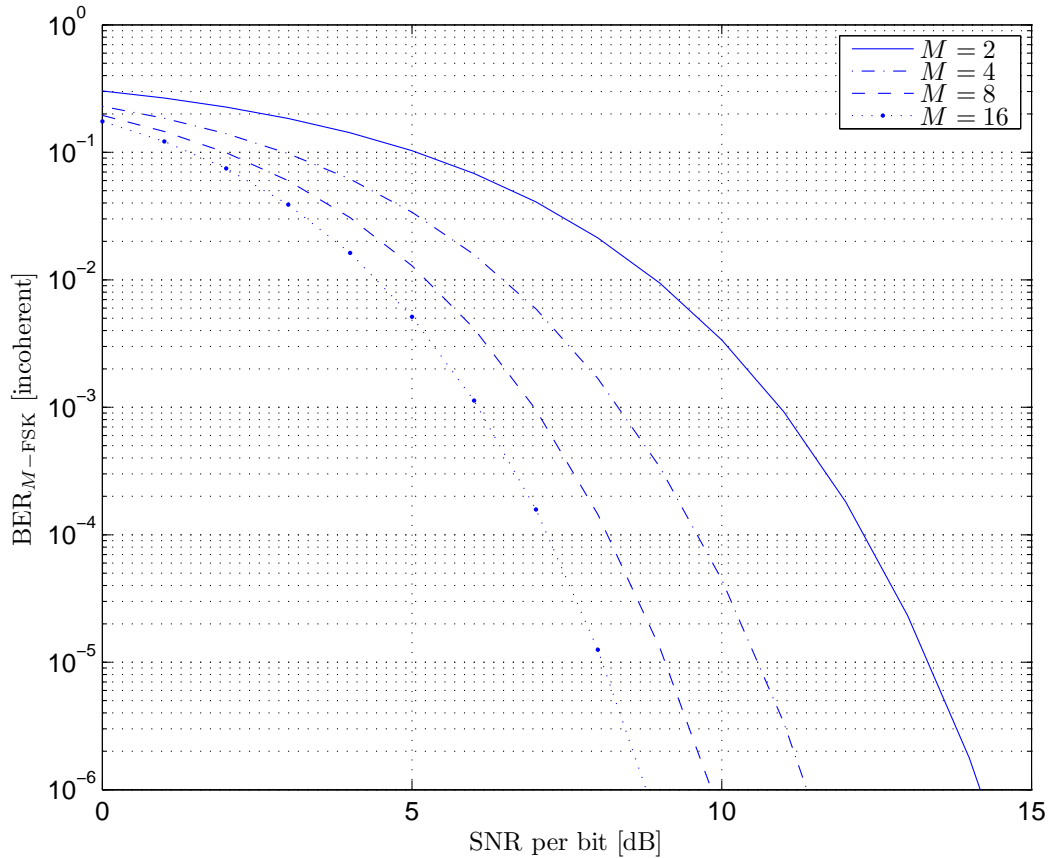
## 10.2 BER over gaussiske kanaler

Ligning (7.51) kan fortsatt brukes til å beregne BER i dette tilfellet. Grafene er vist i Figur 10.3

## 10.3 SER og BER over fading kanaler

Siden (10.14) er en sum av vektet eksponensiale funksjoner av SNR, er det enkelt å anvende MGF-basert metode for å finne SER over fading kanaler. Den MGF-baserte metoden er beskrevet i kapittel



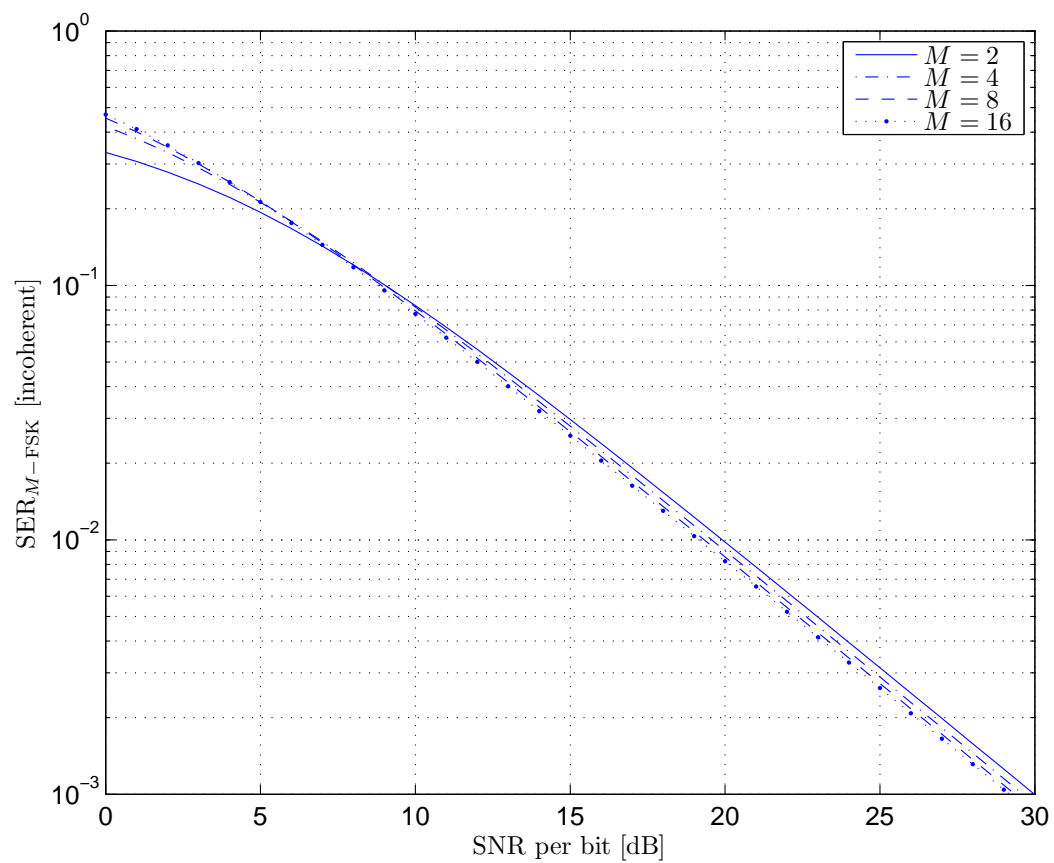


Figur 10.3: BER for  $M$ -FSK ved inkoherent deteksjon.

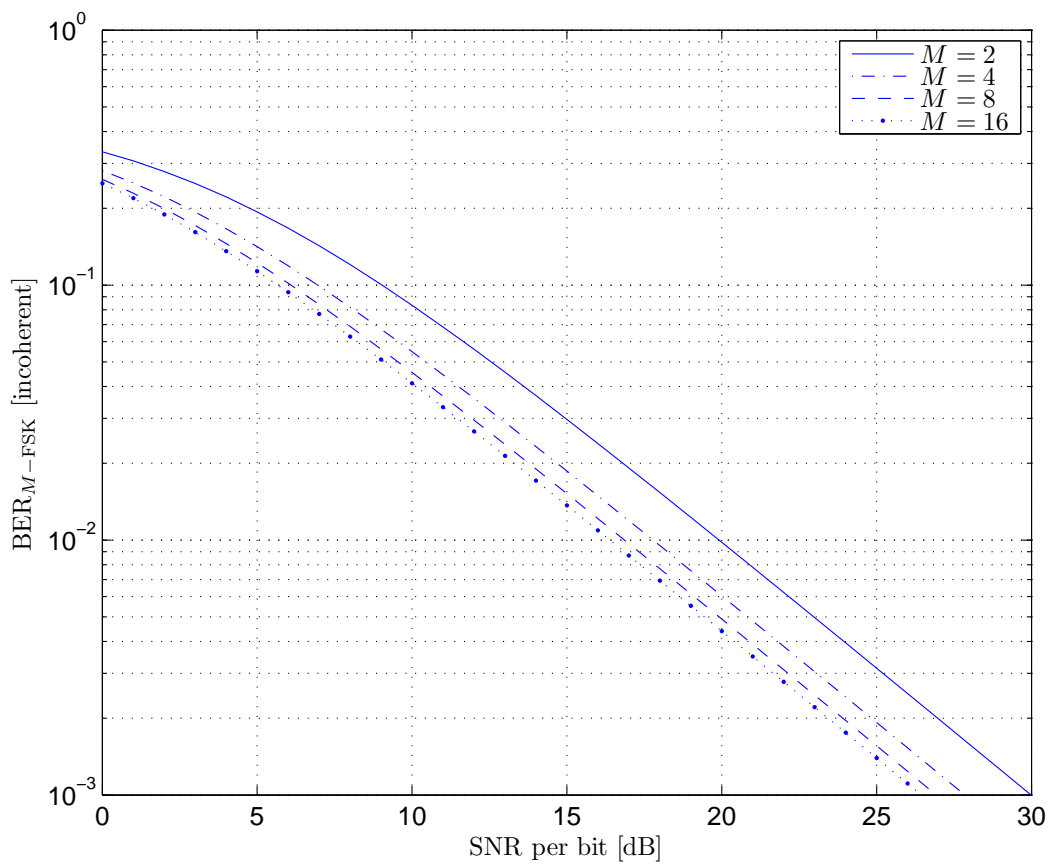
8. For Nakagami- $m$  blir resultatet

$$\begin{aligned}
 \text{SER}_{M\text{-FSK}}^{\text{fading}} &= \sum_{n=1}^{M-1} (-1)^{n+1} \binom{M-1}{n} \frac{1}{n+1} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{nk\gamma}{n+1}\right) f(\gamma) d\gamma \\
 &= \sum_{n=1}^{M-1} (-1)^{n+1} \binom{M-1}{n} \frac{1}{n+1} \mathcal{M}_{\gamma} \left( -\frac{nk}{n+1} \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{M-1} (-1)^{n+1} \binom{M-1}{n} \frac{1}{n+1} \left( 1 + \frac{nk\bar{\gamma}}{m(n+1)} \right)^{-m} \\
 &= \sum_{n=1}^{M-1} (-1)^{n+1} \binom{M-1}{n} \frac{(n+1)^{m-1}}{[1+n(1+k\bar{\gamma}/m)]^m} \tag{10.15}
 \end{aligned}$$

$\text{BER}_{M\text{-FSK}}^{\text{fading}}$  kan beregnes ved hjelp av (7.51). SER og BER kurver er plottet i henholdsvis Figur 10.4 og Figur 10.5.



Figur 10.4: SER for M-FSK over en Rayleigh fading kanal ved inkoherent deteksjon.



Figur 10.5: BER for  $M$ -FSK over en Rayleigh fading kanal ved inkoherent deteksjon.

## Referanser

- [1] S. Chennakeshu and J. B. Anderson, "Error rates for Rayleigh fading multichannel reception of MPSK signals," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 43, no. 2/3/4, February/March/April 1995.
- [2] K. Cho, D. Yoon, "On the general BER expression of one- and two-dimensional amplitude modulations," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 50, no. 7, July 2002.
- [3] K. Cho, D. Yoon, W. Jeong, and M. Kavehrad, "Bit error probability analysis of arbitrary rectangular QAM," *35th Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers*, vol. 1, 2001, pp. 1056–1059.
- [4] J. W. Craig, "A new, simple and exact result for calculating the probability of error for two-dimensional signal constellations," *IEEE MILCOM'91*, Boston, MA, pp. 25.5.1–25.5.5.
- [5] X. Dong and N. C. Beaulieu, "New analytical probability of error expressions for classes of orthogonal signals in Rayleigh fading," *Proc. IEEE Global Communications Conference*, Rio de Janeiro, Brazil, December 1999, pp. 2528–2533.
- [6] T. Eng and L. B. Milstein, "Coherent DS-CDMA performance in Nakagami multipath fading," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 43, no. 2/3/4, February/March/April 1995.
- [7] L. W. Hughes, "A simple upper bound on the error probability for orthogonal signals in white noise," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 40, no. 4, April 1992.
- [8] J. Lassing, E. G. Ström, E. Agrell, and T. Ottosson, "Computation of the exact bit-error rate of coherent  $M$ -ary PSK with Gray code bit mapping," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 51, no. 11, November 2003.
- [9] P. J. Lee, "Computation of the bit error rate of coherent  $M$ -ary PSK with Gray code bit mapping," *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-34, no. 5, May 1986.
- [10] J. Lu, K. B. Letaief, J. C.-I. Chuang, and M. L. Liou, " $M$ -PSK and  $M$ -QAM BER computation using signal signal-space concepts," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 47, no. 2, February 1999.
- [11] J. G. Proakis, *Digital Communications*, Fourth edition. McGraw-Hill, 2001.
- [12] M. K. Simon, S. M. Hinedi, and W. C. Lindsey, *Digital Communication Techniques: Signals Design and Detection*. Englewood Cliffs, NJ: PTR Prentice-Hall, 1995.
- [13] M. K. Simon and M.-S. Alouini, *Digital Communication over Fading Channels*, Second edition. John Wiley & Sons, 2005.
- [14] D. Yoon, K. Cho, and J. Lee, "Bit error probability of  $M$ -ary quadrature amplitude modulation," *Proc. IEEE Vehicular Technology Conference (VTC-Fall 2000)*, vol. 5, Boston, MA, September 2000, pp. 2422–2427.