



FFI Forsvarets
forskningsinstitutt

22/00845

FFI-RAPPORT

Laserstråling gjennom turbulent atmosfære

Del 2 – atmosfære

Andreas Schiller

Laserstråling gjennom turbulent atmosfære

Del 2 – atmosfære

Andreas Schiller

Emneord

Atmosfærisk turbulens
Laserstråler
Optiske systemer
Partielle differensialligninger
Statistiske metoder
Stokastiske prosesser

FFI-rapport

22/00845

Prosjektnummer

1602

Engelsk tittel

Laser beam through turbulent atmosphere
Part 2 – atmosphere

Elektronisk ISBN

978-82-464-3448-3

Godkjennerne

Halvor Bjordal, *forskningsleder*
Halvor Ajer, *forskningssjef*

Dokumentet er elektronisk godkjent og har derfor ikke håndskreven signatur.

Opphavsrett

© Forsvarets forskningsinstitutt (FFI). Publikasjonen kan siteres fritt med kildehenvisning.

Sammendrag

Prosjektet "laservåpen og beskyttelse" innenfor forskningsprogrammet "luftvern, ubemannede luftsystemer og laser" går ut på å utvikle høyeffektlasere som mottiltak mot innkommende prosjektiler, droner og liknende. Lasereffekten leveres på målet gjennom en typisk turbulent atmosfære. Derfor er det relevant å estimere dens påvirkning på strålekvaliteten. Denne rapporten er den andre i en serie. Vi diskuterer her de mest brukte atmosfæremodellene for brytningsindeksfluktasjoner, blant dem Kolmogorov-, Tatarski- og von Kármán-modellen. De tilsvarende spektralfunksjonene inngår i beregningen av forventningsverdiene til strålefeltet.

Summary

The project "laser weapons and protection" within the research program "air defence, unmanned airborne systems and laser" has the goal to develop a high-power laser as a countermeasure against incoming projectiles, drones and similar. The laser effect is delivered on target through a typically turbulent atmosphere. Hence, it is relevant to estimate the atmosphere's effect on the laser beam quality. This report is the second in a series. It discusses the most used atmospheric models for index-of-refraction fluctuations, among them the Kolmogorov, the Tatarski and the von Kármán model. The corresponding spectral functions enter the calculation of the expectations values of the radiation field.

Innhold

Sammendrag	3
Summary	4
1 Innledning	7
2 Stokastiske prosesser	9
2.1 Definisjoner	9
2.1.1 Homogent stokastisk felt	9
2.1.2 Isotropt stokastisk felt	10
2.1.3 Isotropt stokastisk felt med forsvinnende middelvei	10
2.2 Fouriertransformasjoner	11
2.2.1 Strukturfunksjon	11
3 Kolmogorovs modell	13
3.1 Adiabatisk likevekt	13
3.2 Optisk turbulens	15
3.3 Spektralfunksjon	17
4 Tatarskis modell	19
5 Eksponentiell modell	21
5.1 Kombinasjon med Tatarskis modell	22
6 von Kármáns modell	24
7 Modifisert atmosfærisk modell	29
7.1 Alternativ demping ved øvre grense	32
7.2 Andre fenomenologiske modifikasjoner	36
8 Forventningsverdier	37
9 Konklusjon og fremtidsutsikt	44
Vedlegg	
A Gammafunksjon	45
B Evaluering av integralet	46
C Faseforskyvningen til midlet feltstyrke	48



1 Innledning

Rapporten tar for seg grunnleggende modeller for optisk turbulens i atmosfæren. I kapittel 2 gis definisjoner til relevante størrelser til et stokastisk felt, som korrelasjonsfunksjonen, kovariansfunksjonen og strukturfunksjonen. Videre diskuteres forenklinger i tilfelle av et homogent stokastisk felt, et isotropt stokastisk felt og et isotropt stokastisk felt med forsvinnende middelverdi. Til slutt, med utgangspunkt i Fouriertransformasjonen mellom korrelasjonsfunksjon og spektralfunksjon, finner vi den mer relevante transformasjonen mellom spektralfunksjon og strukturfunksjon, som vi vil benytte oss av i den videre rapporten.

I kapittel 3 diskuterer vi ganske grundig den mest grunnleggende modellen for optisk turbulens, som er Kolmogorovs modell. Denne modellen er basert på den fundamentale innsikten at spesifikk kinetisk energi (altså kinetisk energi per masse) flytter seg med konstant rate fra større til mindre strømvirvler og dissiperer til slutt. Ved hjelp av dimensjonsanalyse finner man dermed strukturfunksjonen til hastighetsfeltet i det turbulente området med den typiske $s^{2/3}$ avhengigheten av avstanden. For avstander større enn de største strømvirvler er strukturfunksjonen ukorrelert, det vil si konstant. For små avstander der dissipasjon blir relevant er strukturfunksjonen proporsjonal til s^2 , som er det laveste leddet i en Taylorrekkeutvikling til en strukturfunksjon (som er symmetrisk og som går gjennom origo). Den videre diskusjonen i kapitlet innebærer en beskrivelse av den fysiske mekanismen som gir sammenhengen mellom turbulent bevegelse i luften og optisk turbulens, det vil si stokastiske fluktuasjoner til brytningsindeksen. Denne mekanismen er gitt ved temperaturgradienten til atmosfæren. Her er det interessant å se hvordan adiabatisk temperaturgradient ikke gir opphav til optisk turbulens, mens en gradient som tilsvarer en stabil atmosfære kan gi opphav til optisk turbulens i tilfelle av eksterne luftbevegelser, som for eksempel vind, mens en instabil atmosfære gir både opphav til optisk turbulens og intrinsiske luftbevegelser. Optisk turbulens er altså et væravhengig fenomen.

Kapitlene 5–7 handler alle om hvordan den skjematisk strukturfunksjonen til Kolmogorovs modell (inkludert de dissipative og ukorrelerte områdene) kan knyttes sammen ved å skape egnede overganger mellom områdene. Det som er spesielt er at alle disse overganger blir generert ved modifikasjoner til den turbulente spektralfunksjonene (med sin karakteristiske $\kappa^{-11/3}$ avhengighet). Strukturfunksjonen må derfor i alle tilfeller beregnes ved transformasjonen som er funnet i kapittel 2.2.1. I Tatarskis modell (se kapittel 4) blir overgangen til det dissipative området modellert ved en gaussisk demping ved store absoluttverdier til bølgevektoren κ . I den eksponentielle modellen (se kapittel 5) er overgangen til det ukorrelerte området modellert ved å redusere orden til polen ved $\kappa \rightarrow 0$ med to enheter, det vil si fra $-\frac{11}{3}$ til $-\frac{5}{3}$. Dette gjør at integralet over κ ganger spektralfunksjonen konvergerer (noe det ikke gjør hvis man ikke inkluderer et ukorrelert område). En kombinasjon av Tatarskis modell med den eksponentielle modellen (se kapittel 5.1) gir en første komplett modell av optisk turbulens. von Kármáns modell (se kapittel 6) forbedrer overgangen til det ukorrelerte området ved å forskyve polen vekk fra $\kappa \rightarrow 0$ langs den imaginære aksene. Den modifiserte atmosfæriske modellen (se kapittel 7) inkluderer en fenomenologisk modifisering av Tatarskis modell ved at det inkluderes en liten forhøyelse i spektralfunksjonen rett ved overgangen til det dissipative området. Modifikasjonen kan kombineres enten med von Kármáns modell til det ukorrelerte området eller med den eksponentielle modellen. I siste tilfelle kan strukturfunksjonen formuleres med et kompakt uttrykk, mens i første tilfelle har man bedre konvergensgenskaper ved $\kappa \rightarrow 0$.

I kapittel 8 diskuteres de enkleste forventningsverdiene i Rytov- og Markovapproksimasjonen (se FFI-rapport/22-00075, som er del I i serien), basert på de helt konkrete atmosfæriske modellene som er presentert i kapitlene 3–7. Disse forventningsverdiene brukes blant annet for å beregne midlet feltstyrke og er uavhengige av laserstrålens geometri og et eventuelt optisk system, som måtte være i bruk. Dermed er disse forventningsverdiene kun avhengige av spektralfunksjonen, men ikke av noen detaljerte egenskaper til det undersøkte systemet (bortsett fra den optiske strekningens lengde og strålingens bølgetall).

Rapporten presenterer ikke noen nye teoretiske funn. Tvert imot er formalismen som er diskutert såpass gammel og velprøvd at den har funnet veien i lærebøker som for eksempel boken til Larry C. Andrews og Ronald L. Phillips "Laser Beam Propagation through Random Media" SPIE Press, Bellingham WA (2005), eller den opprinnelig russiske boken til V. Tatarski "The Effect of the Turbulent Atmosphere on Wave Propagation" U.S. Department of Commerce, Springfield VA (1971). Der det er behov for å løse integraler er løsningen tatt ut av boken til I.S. Gradshteyn og I.M. Ryzhik "Table of Integrals, Series, and Products" 7th edition Academic Press, Burlington MA (2007). Asymptotiske uttrykk til høyere transcendent funksjoner er stort sett tatt ut av boken til M. Abramowitz og I.A. Stegun "Handbook of Mathematical Functions" 9th printing Dover Publications, New York NY (1972). Numeriske verdier til atmosfæriske egenskaper (for eksempel viskositet, tetthet, brytningsindeks og dens avhengighet av bølgelengde, trykk og temperatur) kan trivielt søkes opp på internett. Det er uansett ikke målet med denne her rapporten å presentere presise numeriske funn. Presentasjonen av modellene er derimot min og jeg tror at ved å ha en pedagogisk fremgangsmåte blir utviklingen og motivasjonen til de forskjellige modellene lettere å forstå.

Planen er for en av disse atmosfæriske modeller og for et helt konkret optisk system å sammenlikne resultater fra Rytovapproksimasjonen, Markovapproksimasjonen og et tilstrekkelig stort ensemble av numeriske løsninger som baserer seg på spesielle realiseringer av atmosfæremodellen. Et dataprogram som kan produsere slike numeriske løsninger eksisterer allerede ved FFI. Programmet er utviklet av G. Arisholm (som jeg også ønsker å takke for gjennomlesning av manuskriptet og mange gode forslag for forbedringen av teksten) og har fått navn Sisyfos (simulation system for optical science).

2 Stokastiske prosesser

2.1 Definisjoner

Vi antar et stokastisk felt $v_{\mathbf{r}}$ med fordelingsfunksjon $p(v_{\mathbf{r}}, \mathbf{r})$ og andregrads fordelingsfunksjon $p(v_{\mathbf{r}_1}, \mathbf{r}_1, v_{\mathbf{r}_2}, \mathbf{r}_2)$. Middelerverdi eller første forventningsverdi til dette feltet er dermed gitt ved

$$m_1(\mathbf{r}) = \langle v(\mathbf{r}) \rangle = \int v_{\mathbf{r}} p(v_{\mathbf{r}}, \mathbf{r}) dv_{\mathbf{r}}.$$

Andre forventningsverdi til feltet er gitt ved

$$m_2(\mathbf{r}) = \langle v^2(\mathbf{r}) \rangle = \int v_{\mathbf{r}}^2 p(v_{\mathbf{r}}, \mathbf{r}) dv_{\mathbf{r}}.$$

Dermed formuleres variansen som vanlig ved

$$\sigma^2(\mathbf{r}) = \langle (v(\mathbf{r}) - \langle v(\mathbf{r}) \rangle)^2 \rangle = m_2(\mathbf{r}) - m_1^2(\mathbf{r}).$$

Videre kan man formulere korrelasjonsfunksjonen

$$R_v(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle v(\mathbf{r}_1)v(\mathbf{r}_2) \rangle = \iint v_{\mathbf{r}_1} v_{\mathbf{r}_2} p(v_{\mathbf{r}_1}, \mathbf{r}_1, v_{\mathbf{r}_2}, \mathbf{r}_2) dv_{\mathbf{r}_1} dv_{\mathbf{r}_2},$$

kovariansen

$$B_v(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle (v(\mathbf{r}_1) - m_1(\mathbf{r}_1)) (v(\mathbf{r}_2) - m_1(\mathbf{r}_2)) \rangle = R_v(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - m_1(\mathbf{r}_1)m_1(\mathbf{r}_2)$$

og strukturfunksjonen

$$D_v(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle (v(\mathbf{r}_1) - v(\mathbf{r}_2))^2 \rangle = m_2(\mathbf{r}_1) + m_2(\mathbf{r}_2) - 2R_v(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2).$$

Gitt disse definisjonene ser man umiddelbart at

$$\begin{aligned} R_v(\mathbf{r}, \mathbf{r}) &= m_2(\mathbf{r}) = \sigma^2(\mathbf{r}) + m_1^2(\mathbf{r}) \\ B_v(\mathbf{r}, \mathbf{r}) &= R_v(\mathbf{r}, \mathbf{r}) - m_1^2(\mathbf{r}) = \sigma^2(\mathbf{r}) \\ D_v(\mathbf{r}, \mathbf{r}) &= 2(m_2(\mathbf{r}) - R_v(\mathbf{r}, \mathbf{r})) = 0. \end{aligned}$$

2.1.1 Homogent stokastisk felt

Et stokastisk felt kalles homogent hvis fordelingsfunksjonen er invariant i henhold til translasjonen $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{s}$, som betyr at $p(v_{\mathbf{r}}, \mathbf{r}) = p(v)$ og $p(v_{\mathbf{r}_1}, \mathbf{r}_1, v_{\mathbf{r}_2}, \mathbf{r}_2) = p(v, v_{\pm\mathbf{s}}, \pm\mathbf{s})$. Her har vi brukt symmetrien $p(v_{\mathbf{r}_1}, \mathbf{r}_1, v_{\mathbf{r}_2}, \mathbf{r}_2) = p(v_{\mathbf{r}_2}, \mathbf{r}_2, v_{\mathbf{r}_1}, \mathbf{r}_1)$. For et homogent stokastisk felt gjelder derfor

$$\begin{aligned} m_1(\mathbf{r}) &= m_1 \\ m_2(\mathbf{r}) &= m_2 \end{aligned}$$

og dermed

$$\sigma^2(\mathbf{r}) = \sigma^2.$$

Videre ser man umiddelbart at

$$\begin{aligned}R_v(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= R_v(\pm\mathbf{s}) \\B_v(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= B_v(\pm\mathbf{s}) = R_v(\pm\mathbf{s}) - m_1^2 \\D_v(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= D_v(\pm\mathbf{s}) = 2(m_2 - R_v(\pm\mathbf{s})),\end{aligned}$$

der $\mathbf{s} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. I denne sammenhengen er det også interessant å nevne at siden $D_v(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ er definert som et kvadratisk uttrykk, mens $D_v(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = 0$, som betyr at for et homogent stokastisk felt, så er $D_v(0) = 0$, så gjelder nødvendigvis

$$D_v(\pm\mathbf{s}) \geq D_v(0) = 0.$$

Dette betyr samtidig at

$$\begin{aligned}R_v(\pm\mathbf{s}) &\leq R_v(0) = m_2 \\B_v(\pm\mathbf{s}) &\leq B_v(0) = \sigma^2.\end{aligned}$$

2.1.2 Isotrop stokastisk felt

Et homogent stokastisk felt kalles isotropt hvis andregrads fordelingsfunksjon kun avhenger av avstanden $s = |\mathbf{s}|$ og ikke av retningen $\pm\mathbf{s}$. For et isotropt stokastisk felt finner man umiddelbart

$$\begin{aligned}R_v(\pm\mathbf{s}) &= R_v(s) \\B_v(\pm\mathbf{s}) &= B_v(s) = R_v(s) - m_1^2 \\D_v(\pm\mathbf{s}) &= D_v(s) = 2(m_2 - R_v(s)).\end{aligned}$$

2.1.3 Isotrop stokastisk felt med forsvinnende middelvei

En siste forenkling kan gjøres hvis middelveien til det homogene stokastiske feltet forsvinner, det vil si hvis $m_1 = 0$. Her ser man ganske enkelt at

$$m_2 = \sigma^2$$

og

$$\begin{aligned}B_v(s) &= R_v(s) \\D_v(s) &= 2(\sigma^2 - R_v(s)).\end{aligned}$$

Videre har man den spesielle verdien

$$R_v(0) = \sigma^2.$$

2.2 Fouriertransformasjoner

I del I av denne rapportserien har vi definert

$$R_V(\mathbf{s}) = \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{s}} \Phi(\mathbf{k}) d^3\mathbf{k}$$

ved en Fouriertransformasjon, som betyr at den inverse transformasjonen er gitt ved

$$\Phi(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{s}} R_V(\mathbf{s}) d^3\mathbf{s}.$$

For et isotropt stokastisk felt kan man forenkle integralet til

$$\Phi(\kappa) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint e^{-i\kappa s \cos \vartheta} R_V(s) s^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta ds,$$

der man lett kan evaluere integralene over vinkelkoordinatene som gir

$$\Phi(\kappa) = \frac{1}{2\pi^2\kappa} \int \sin(\kappa s) R_V(s) s ds.$$

Helt analogt får man selvfølgelig for den første Fouriertransformasjonen i tilfelle av et isotropt stokastisk felt

$$R_V(s) = \frac{4\pi}{s} \int \sin(\kappa s) \Phi(\kappa) \kappa d\kappa.$$

2.2.1 Strukturfunksjon

Strukturfunksjonen til et isotropt stokastisk felt er gitt ved

$$D_V(s) = 2 (R_V(0) - R_V(s)).$$

Dermed er strukturfunksjonen gitt ved transformasjonen

$$D_V(s) = 2 \iiint (1 - e^{i\kappa s \cos \vartheta}) \Phi(\kappa) \kappa^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta d\kappa,$$

som vel å merke ikke er noen Fouriertransformasjon. Uansett kan man igjen lett integrere over vinkelkoordinatene som gir

$$D_V(s) = 8\pi \int \left(1 - \frac{\sin(\kappa s)}{\kappa s}\right) \Phi(\kappa) \kappa^2 d\kappa.$$

Det er nå ikke helt åpenbart, som det var i tilfelle av en Fouriertransformasjon, å finne den inverse transformasjonen. Den er nemlig gitt ved

$$\Phi(\kappa') = \frac{1}{4\pi^2\kappa'^2} \int \frac{\sin(\kappa' s)}{\kappa' s} \frac{d}{ds} \left(s^2 \frac{d}{ds} D_V(s) \right) ds.$$

Vi skal i det følgende vise at denne inverse transformasjonen faktisk gir riktig resultat. Utgangspunkt er formuleringen til $D_\nu(s)$ som et integral, der vi kan beregne

$$\frac{d}{ds} \left(s^2 \frac{d}{ds} D_\nu(s) \right) = -8\pi \int \frac{d}{ds} \left(s^2 \frac{d}{ds} \frac{\sin(\kappa s)}{\kappa s} \right) \Phi(\kappa) \kappa^2 d\kappa.$$

Derivasjonen i integralet evalueres til

$$\frac{d}{ds} \left(s^2 \frac{d}{ds} \frac{\sin(\kappa s)}{\kappa s} \right) = -\kappa s \sin(\kappa s),$$

som dermed gir

$$\Phi(\kappa') = \frac{2}{\pi \kappa'^3} \iint \sin(\kappa' s) \sin(\kappa s) \Phi(\kappa) \kappa^3 d\kappa ds.$$

Siden

$$\int \sin(\kappa' s) \sin(\kappa s) ds = \frac{\pi}{2} \delta(\kappa' - \kappa)$$

kan man videre evaluere først integralet over s og deretter integralet over κ , slik at man ender opp med en identitet. Dermed er det bevist at den gitte inverse transformasjonen er korrekt.

3 Kolmogorovs modell

I bunnen til alle atmosfæriske turbulensmodeller ligger Kolmogorovs modell, som igjen grovt sett baserer seg på en enkel dimensjonsanalyse. I det turbulente området der treghetskrefter dominerer finner vi nemlig en konstant spesifikk rate til energioverføring ϵ fra større til mindre turbulente strukturer. Det betyr at kinetisk energi (per masse) flytter seg fra større til mindre strømvirvler med tiden. Denne raten har derfor dimensjon til energi per masse og tid, eller $\frac{\text{m}^2}{\text{s}^3}$. For å danne en strukturfunksjon til et (isotropt) hastighetsfelt må denne raten derfor ganges med en avstand s for så å ta produktet opphøyd i to tredeler. Til sammen får man altså

$$D_v(s) = \langle (v_1 - v_2)^2 \rangle = 2(\epsilon s)^{2/3} = C_v^2 s^{2/3},$$

som har riktig dimensjon $\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ og der den ekstra faktoren 2 er motivert ved at (spesifikk) kinetisk energi er proporsjonalt $\frac{1}{2}v^2$. Her har vi samtidig introdusert strukturkonstanten til hastighetsfeltet C_v^2 , som da får enhet $\frac{\text{m}^{4/3}}{\text{s}^2}$.

Den enkle strukturfunksjonen gjelder innenfor det turbulente området der nedre grense l_0 er gitt ved dissipative effekter og øvre grense L_0 er gitt ved størrelsen til de største strømvirvlene. Disse har gjerne samme størrelse som de største hindrene for luftbevegelse, det vil si de største strukturene i landskapet langs stråleveien eller høyden over bakken. Utover disse avstander er hastighetsfeltet antatt ukorrelert og strukturfunksjonen vil nærme seg $D_v(s) \rightarrow 2\sigma^2$. Uansett er en absolutt øvre grense for korrelasjon gitt ved lengden av stråleveien. Korrelasjoner som strekker seg utover hele stråleveien (eller mere) blir nemlig absorbert i middelverdien til det stokastiske feltet.

For dissipative effekter er ikke den vanlige (dynamiske) viskositeten μ (med dimensjon $\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}$) så relevant, men den kinematiske viskositeten $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ (med dimensjon $\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$). Hvis man så vil konstruere en lengde (det vil si en nedre grense) ut i fra den kinematiske viskositeten og energioverføringsraten ϵ (som også er energidissipasjonsraten) så finner man igjen ved dimensjonsanalyse at

$$l_0 \propto \sqrt[4]{\frac{\nu^3}{\epsilon}}.$$

Her ser man at ved sterk turbulens, det vil si når energioverføringsraten er stor, så dominerer turbulente effekter ned til kortere avstander, og omvendt, men avhengigheten er forholdsvis svak. For å få et inntrykk av de faktiske tallverdiene så finner vi en energidissipasjonsrate i atmosfæren som ligger rundt $\epsilon \approx 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^3}$, mens den kinematiske viskositeten til luft er omtrent $\nu \approx 1,5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$, som gir en nedre grense i størrelsesorden $l_0 \approx 2-3 \text{ mm}$ (proporsjonalitetsfaktoren er ofte antatt å være lik 7,4, som gir en nedre grense rundt 2 cm lenger oppe i atmosfæren).

3.1 Adiabatisk likevekt

Brytningsindeksen er ikke avhengig av vindhastigheten som betyr at et turbulent hastighetsfelt i seg selv ikke kan forklare optisk turbulens. I kapittel 3.2 kommer vi til å se at brytningsindeksen derimot er avhengig av temperatur. Derfor skal vi i første omgang se på hvordan et turbulent hastighetsfelt

kan generere et stokastisk temperaturfelt. Den formidlende effekten er gitt ved adiabatisk likevekt (eller retttere sagt avviket fra denne likevekten). En atmosfære i likevekt har nemlig en adiabatisk temperaturgradient som vi kommer til å beregne her. Utgangspunkt til dette er adiabatan

$$pV^\gamma = p_0V_0^\gamma,$$

som også kan formuleres ved tetthet ρ som $p\rho^{-\gamma} = p_0\rho_0^{-\gamma}$.

Trykket minker med høyden h ved

$$dp = -g\rho dh$$

der g er tyngdeakselerasjonen, som gjør at vi finner differensiallikningen

$$p^{-1/\gamma} dp = -gp_0^{-1/\gamma} \rho_0 dh.$$

Likningen kan integreres fra p_0 til p på venstre side og tilsvarende fra 0 til h på høyre side som gir

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \left[p_0 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-1/\gamma} p \right] = g\rho_0 h,$$

eller, hvis man bruker $\left(\frac{p}{p_0} \right)^{-1/\gamma} = \frac{\rho_0}{\rho}$, så ender man opp med

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \left[p_0 - \frac{\rho_0 p}{\rho} \right] = g\rho_0 h.$$

Videre formulerer man likningen med volum istedenfor tetthet og man får

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} [p_0 V_0 - pV] = M_V g h,$$

der M_V er luftmassen til volumet V . Siden atmosfærisk luft kan godt beskrives som en ideell gass, kan likningen forenkles til

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} R [T_0 - T] = m_m g h,$$

der m_m er luftens molare masse og R er den universelle molare gasskonstanten. Dette kan omformes til

$$T = T_0 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{m_m g}{R} h,$$

der man ser at temperaturen synker linjært med høyden. Hvis man beregner koeffisienten så ser man at atmosfærisk temperatur minker med omtrent én Kelvin per hundre høydemetre, det vil si vi har omtrent

$$T = T_0 - 0,01 \frac{\text{K}}{\text{m}} h.$$

Det interessante er nå at hvis man har en atmosfære med nøyaktig denne adiabatiske temperaturgradienten, så genereres ikke noe stokastisk temperaturfelt, selv om det er luftbevegelse. Grunnen til det er at når luften flyttes opp eller ned så minker eller øker dens temperatur akkurat ifølge den adiabatiske temperaturgradienten og likevekten blir dermed bevart. Kun hvis atmosfæren har en ikke-adiabatisk temperaturgradient så får luft som flyttes opp eller ned (og som i denne prosessen fremdeles forandrer sin temperatur ifølge den adiabatiske temperaturgradienten) en annen

temperatur enn luft som befant seg på samme høyde fra før. Det er altså avviket fra en adiabatisk temperaturgradient som gjennom et turbulent hastighetsfelt skaper et stokastisk temperaturfelt (og dermed optisk turbulens).

Det er også viktig å huske at selv om en adiabatisk temperaturgradient tilsvarer en stabil atmosfære (og minimalt med optisk turbulens), så gir gradienter som er mindre negativ enn den adiabatiske gradienten også opphav til en stabil atmosfære (men ikke til en atmosfære i likevekt). Enda mer spesiell er en inversjon, det vil si en positiv temperaturgradient, som fører til at det blir veldig lite vertikal utveksling av luftmassene. En slik situasjon oppstår gjerne om vinteren, som i kombinasjon med eksos fra trafikk og vedfyring kan føre til ganske dårlig luftkvalitet. Men til tross for at atmosfæren er stabil, så oppstår under vertikal luftbevegelse (ved for eksempel turbulent luftbevegelse på grunn av vind) optisk turbulens, siden temperaturgradienten ikke tilsvarer den adiabatiske gradienten.

En temperaturgradient som er mer negativ enn den adiabatiske temperaturgradienten tilsvarer en instabil atmosfære. Her er luften nede i atmosfæren for varm og dermed for lett, slikt at den begynner å stige opp, mens kaldere luft høyere opp i atmosfæren begynner å falle ned. De motgående luftstrømmene gir da gjerne opphav til turbulent luftbevegelse. Ikke bare gir en slik instabil atmosfære optisk turbulens i tilfelle vind, den også initierer vertikal luftbevegelse nettopp på grunn av dens instabilitet. Instabil atmosfære gir opphav til den sterkeste optiske turbulensen. En slik situasjon opptrer gjerne om sommeren under sterk solinnstråling, der bakken varmer seg kraftig opp og man kan ha temperaturgradienter i størrelsesorden av flere Kelvin per meter rett over bakken.

Ellers kan den adiabatiske temperaturgradienten (og avvik derfra) knyttes til forskjellige vær fenomener. Luft, som presses opp en fjellside, kjøles typisk ned en del mindre enn den adiabatiske gradienten skulle tilsi. Grunnen for dette er at fuktigheten i luften kondenserer ut i form av tåke, regn eller snø og kondensasjonsvarmen overføres til luften. På den andre fjellsiden derimot, der luften faller ned i dalen, øker temperaturen stort sett i samsvar med den adiabatiske gradienten, siden luften typisk ikke tar opp mye ny fuktighet. Denne føneeffekten kan produsere luft som er 5–10°C varmere enn i utgangspunktet (og også en god del tørrere). Fønvind oppstår gjerne på nordsiden av Alpene, men også på Østlandet ved vestvind.

Motsetningen til fønvind er katabatisk vind. Utgangspunktet er en situasjon der temperaturgradienten er mer negativ enn den adiabatiske gradienten. I et høytrykkområde kan luft i høyfjellet kjøles ned voldsomt ved uhindret varmeutstråling ut i verdensrommet. Denne luften blir altså veldig kald og dermed veldig tung og begynner å strømme ned fjellsiden. Selv om denne luften varmes opp på veien ned mot havet, så varmes den ikke opp nok for at fallet stoppes. Luften forblir kaldere (og dermed tyngre) enn luften den møter på vei nedover. I Antarktis og på Grønland er det stort sett alltid katabatisk vind. I Europa finnes det Mistralvinden som blåser nedover Rhône-dalen og Bora som blåser ned til Adriahavet. I Norge er effekten nokså lokalt der det er isbreer.

3.2 Optisk turbulens

Siden temperaturen er en linear funksjon av høyden (eller mere generelt avstand i tilfelle av et turbulent hastighetsfelt), kan man anta at strukturfunksjonen til temperaturfeltet har samme avhengighet fra avstand som hastighetsfeltet, det vil si, vi forventer en strukturfunksjon av typen

$$D_T(s) = \langle (T_1 - T_2)^2 \rangle = C_T^2 s^{2/3},$$

der C_T^2 er strukturkonstanten til temperaturfeltet som dermed får enhet $\frac{\text{K}^2}{\text{m}^{2/3}}$. Her er det viktig å huske at i det turbulente området, der treghetskrefter dominerer, flyttes kinetisk energi fra større til mindre turbulente strukturer, men energien blir ikke konvertert til varme. Dette skjer kun ved nedre grense l_0 der dissipative effekter begynner å ta over og som ikke omfattes av den turbulente delen av strukturfunksjonen.

Brytningsindeks som funksjon av bølgelengde, trykk og temperatur kan tilnærmes som

$$n = 1 + 77,6 \cdot 10^{-6} \frac{\text{K}}{\text{mbar}} \left(1 + \frac{7,52 \cdot 10^{-3} \mu\text{m}^2}{\lambda^2} \right) \frac{p}{T}.$$

Hvis vi velger $\lambda = 633 \text{ nm} = 0,633 \mu\text{m}$, som er en typisk optisk bølgelengde (realisert ved en He-Ne laser), så kan uttrykket forenkles til

$$n = 1 + 79 \cdot 10^{-6} \frac{\text{K}}{\text{mbar}} \frac{p}{T}.$$

Med $p = 1013,25 \text{ mbar}$ og $T = 273,15 \text{ K}$ ender man dermed opp med $n = 1,000293$, som nevnt i del I av rapportserien. Mere interessant er det nå å utlede en sammenheng mellom temperaturfluktuasjonene og fluktuasjonene til brytningsindeksen. For å oppnå dette kan vi formulere

$$\langle (n_1 - n_2)^2 \rangle = \left(79 \cdot 10^{-6} \frac{\text{K}}{\text{mbar}} p \right)^2 \left\langle \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)^2 \right\rangle,$$

der vi ser bort fra mulige trykkfluktuasjoner (som jo utjevnes veldig kjapp – gjerne med lydens hastighet), mens temperaturfluktuasjoner overlever mye lengre fordi varmeledning er en særdeles treg prosess. Den siste faktoren kan også formuleres som

$$\left\langle \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(\frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} \right)^2 \right\rangle \approx \frac{1}{T^4} \langle (T_1 - T_2)^2 \rangle,$$

der vi utnytter at variasjonene i nevneren er neglisjerbare sammenliknet med variasjonene i telleren. Det samme resultatet kan man også utlede ved å først linearisere temperaturavhengigheten til brytningsindeksen ved temperatur T , det vil si ved

$$\Delta n = 79 \cdot 10^{-6} \frac{\text{K}}{\text{mbar}} \frac{p}{T^2} \Delta T.$$

Hvis vi nå formulerer en strukturfunksjon til brytningsindeksen, så forventer man igjen samme avhengighet fra avstand (på grunn av den tilnærmet lineare avhengigheten mellom brytningsindeks- og temperaturvariasjoner), altså

$$D_n(s) = C_n^2 s^{2/3},$$

mens konstanten til strukturfunksjonen C_n^2 blir relatert til C_T^2 ved

$$C_n^2 = \left[79 \cdot 10^{-6} \frac{\text{K}}{\text{mbar}} \frac{p}{T^2} \right]^2 C_T^2.$$

Hvis vi igjen bruker samme p og T som før, så får vi $C_n^2 = 1,15 \cdot 10^{-12} \frac{1}{\text{K}^2} C_T^2$, altså en verdi som er hele tolv størrelsesorden mindre. Enheten til konstanten blir forresten $\text{m}^{-2/3}$. For å få et inntrykk av

de faktiske tallverdiene, så velger vi en representativ strømvirvel som flytter luft over en avstand av én meter. Som en slags nedre grense antar vi et avvik fra den adiabatisk temperaturgradienten som er i samme størrelsesorden som selve gradienten, det vil si rundt $0,01 \frac{\text{K}}{\text{m}}$ (se kapittel 3.1). Det betyr at den forflyttete luften nå har en temperaturfluktuasjon i størrelsesorden $0,01 \text{ K}$. I første omgang betyr det at brytningsindeksen fluktuierer med omtrent $\Delta n = 10^{-8}$, som også er verdien nevnt i del I av rapportserien. Her har vi brukt våre vanlige verdier for p og T . Videre betyr det at strukturkonstanten til temperaturfeltet burde ligge rundt $10^{-4} \frac{\text{K}^2}{\text{m}^{2/3}}$ og strukturkonstanten til brytningsindeksfeltet burde ligge rundt $10^{-16} \text{ m}^{-2/3}$. Dette ligger, som forventet, ved den nedre grensen til eksperimentelle verdier som dekker et område fra 10^{-17} – $10^{-13} \text{ m}^{-2/3}$. Verdiene på den øvre enden av skalaen impliserer temperaturgradienter som er mye større enn den adiabatisk temperaturgradienten. Slike gradienter kan lett oppstå ved oppvarming av bakken gjennom direkte sollys på en sommerdag. Under slike omstendigheter kan optisk turbulens bli en veldig stor effekt for stråleveier ved liten høyde over bakken (se kapittel 3.1).

3.3 Spektralfunksjon

Hvis vi kun bruker strukturfunksjonen $D_n(s) = C_n^2 s^{2/3}$ for å beregne en spektralfunksjon, så får vi

$$\Phi(\kappa) = \frac{1}{4\pi^2 \kappa^2} \int \frac{\sin(\kappa s)}{\kappa s} \frac{d}{ds} \left(s^2 \frac{d}{ds} C_n^2 s^{2/3} \right) ds$$

jamført den inverse transformasjonen fra kapittel 2.2.1. Dermed får vi

$$\Phi(\kappa) = \frac{5C_n^2}{18\pi^2 \kappa^3} \int s^{-1/3} \sin(\kappa s) ds,$$

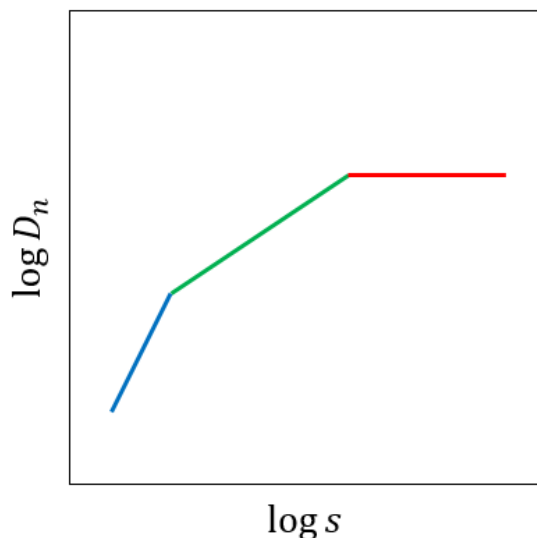
som gir

$$\Phi(\kappa) = \frac{5C_n^2}{18\pi^2 \kappa^3} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\kappa^{2/3}} \sin\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{5}{18\pi \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 \kappa^{-11/3},$$

der vi i det siste trinnet har redusert argumentet til gammafunksjonen jamført vedlegg A. Denne spektralfunksjonen, der den numeriske faktoren evalueres til $0,033$ kalles Kolmogorovspektret.

Kolmogorovspektret, som tilsvarende en enkel potenslov egner seg ikke for videre beregninger. Problemet er blant annet at i Rytovapproximasjonen (se del I av rapportserien), så beregnes for eksempel første forventningsverdi ved integralet over $\kappa \Phi(\kappa)$. Et slikt integral konvergerer ikke for noe som helst potenslov. Avhengig av potensen divergerer integralet enten ved $\kappa \rightarrow 0$ eller for $\kappa \rightarrow \infty$ (eller i verste fall for begge deler). Det er derfor klart at strukturfunksjonen eller tilsvarende spektralfunksjonen må modifiseres.

Vi vet egentlig allerede at den delen av strukturfunksjonen som har den $s^{2/3}$ avhengigheten har både en nedre og øvre grense. Ved nedre grense, så forlenger man gjerne med en s^2 avhengighet, som er den laveste symmetriske orden i en Taylorrekkeutvikling. Ved øvre grense begynner strukturfunksjonen til å bli ukorrelet, derfor forlenger man gjerne med en konstant. Til sammen får



Figur 3.1 Skjematisk strukturfunksjon med dissipativ (blå), turbulent (grønn) og ukorrelert (rød) del.

man altså et skjematisk uttrykk

$$D_n(s) = \begin{cases} C_n^2 l_0^{-4/3} s^2, & s < l_0 \\ C_n^2 s^{2/3}, & l_0 \leq s \leq L_0 \\ C_n^2 L_0^{2/3}, & L_0 < s \end{cases}$$

der strukturfunksjonen er kontinuerlig (men ikke differensierbar, se Figur 3.1) ved l_0 og L_0 . Siden strukturfunksjonen ikke er differensierbar for alle s kan man heller ikke beregne en tilsvarende spektralfunksjon. På den andre siden, hvis man hadde avrundet hjørnene slikt at strukturfunksjonen var differensierbar, så kunne man både beregne en strukturfunksjon og fått konvergente integraler ved beregning av forventningsverdiene i for eksempel Rytovapproximasjonen. Mye av diskusjonen fremover vil derfor dreie seg om enten hvordan den skjematisk strukturfunksjonen modifiseres eller om modifikasjoner anvendt direkte på spektralfunksjonen. Hvis man velger det siste må man huske at en nedre grense l_0 i strukturfunksjonen tilsvarer en øvre grense for bølgetall $\kappa_m \sim \frac{2\pi}{l_0}$ i spektralfunksjonen og omvendt, en øvre grense L_0 tilsvarer en nedre grense $\kappa_0 \sim \frac{2\pi}{L_0}$. Faktisk, siden i både Rytov- og Markovapproximasjonen inngår spektralfunksjonen og ikke strukturfunksjonen, kommer alle modifikasjoner som vi diskuterer i denne rapporten til å være modifikasjoner til Kolmogorovspektret, altså til spektralfunksjonen (men vi kommer til å beregne de tilsvarende modifiserte strukturfunksjonene også).

4 Tatarskis modell

Tatarskis modell adresserer kun problemet ved den fysikalsk mer relevante nedre grensen i strukturfunksjonen (altså den øvre grensen til spektralfunksjonen). Utgangspunkt er selvfølgelig Kolmogorovspektret, men med en eksponentiell demping for store bølgetall. Modellen er gitt ved

$$\Phi(\kappa) = \frac{5}{18\pi\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 \kappa^{-11/3} e^{-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}}.$$

Det er nå interessant å se hvordan modifikasjonen til spektralfunksjonen gir utslag på strukturfunksjonen. Vi beregner derfor strukturfunksjonen ved transformasjonen

$$D_n(s) = 8\pi \int \left(1 - \frac{\sin(\kappa s)}{\kappa s}\right) \Phi(\kappa) \kappa^2 d\kappa$$

jamført kapittel 2.1.1. Med Tatarskis modell får vi med litt algebra integralet

$$D_n(s) = \frac{20C_n^2}{9\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} s^{2/3} \int (\kappa s)^{-5/3} e^{-\frac{(\kappa s)^2}{(\kappa_m s)^2}} \left[1 - \frac{\sin(\kappa s)}{(\kappa s)}\right] d(\kappa s).$$

Ved hjelp av vedlegg B kan vi evaluere integralet til

$$D_n(s) = \frac{20C_n^2}{9\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} s^{2/3} \frac{1}{2} (\kappa_m s)^{-2/3} \Gamma\left(-\frac{1}{3}\right) \left[1 - {}_1F_1\left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2\right)\right],$$

der ${}_1F_1$ er den konfluent hypergeometriske funksjonen. Ved hjelp av vedlegg A finner vi videre at $\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}$ og med litt algebra finner vi endelig

$$D_n(s) = \frac{20\pi}{3\sqrt{3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{C_n^2}{\kappa_m^{2/3}} \left[{}_1F_1\left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2\right) - 1\right],$$

der den numeriske faktoren evalueres til 1,685.

Det er nå interessant å se i hvilken grad denne strukturfunksjonen er en forbedring av den skjematiske strukturfunksjonen fra kapittel 3.3. Vi skal derfor se på asymptotiske verdier. For store negative argumenter har vi

$${}_1F_1\left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2\right) \sim \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{3}\right)} \left[\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2\right]^{1/3},$$

som gir til sammen

$$D_n(s) \sim \frac{20\pi}{3\sqrt{3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} s^{2/3}.$$

Ved hjelp av vedlegg A finner vi videre at $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ og $\Gamma\left(\frac{11}{6}\right) = \frac{5\pi}{3\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}$. Dermed får vi til sammen

$$D_n(s) \sim 2^{1/3} \sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 s^{2/3}.$$

Med doblingsformelen finner vi videre at

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) &= \Gamma\left(2 \cdot \frac{1}{6}\right) = \frac{2^{\frac{1}{3}-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \Gamma\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2^{2/3} \sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2^{2/3} \sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \frac{2\pi}{\sqrt{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}, \end{aligned}$$

som lar seg omforme til

$$2^{1/3} \sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)} = 1$$

og dermed får man endelig

$$D_n(s) \sim C_n^2 s^{2/3}.$$

Vi ser altså at strukturfunksjonen ved store avstander følger Kolmogorovs modell. Det burde ikke være overraskende, siden modifikasjonen i Tatarskis modell skulle uansett bare være relevant for små avstander.

For små argumenter finner vi fra Taylorrekken til den konfluent hypergeometriske funksjonen (se vedlegg B) at

$${}_1F_1\left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2\right) \sim 1 + \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{3}{2}} \left[-\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2\right],$$

som gir til sammen

$$\begin{aligned} D_n(s) &\sim \frac{20\pi}{3\sqrt{3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{C_n^2}{\kappa_m^{2/3}} \left[\frac{2}{9} \left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2\right] \\ &\sim \frac{10\pi}{27\sqrt{3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 \kappa_m^{4/3} s^2, \end{aligned}$$

som altså tilsvarer det skjematiske uttrykket $C_n^2 l_0^{-4/3} s^2$ fra kapittel 3.3 hvis man setter

$$\kappa_m = \left(\frac{27\sqrt{3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}{10\pi}\right)^{3/4} \frac{1}{l_0}.$$

Den numeriske faktoren evalueres til 5,909, som er ganske likt det skjematiske estimatet 2π .

5 Eksponentiell modell

Den eksponentielle modellen adresserer kun problemet ved den øvre grensen. Utgangspunkt er igjen Kolmogorovspektret, men med en demping for små bølgetall. Modellen er gitt ved

$$\Phi(\kappa) = \frac{5}{18\pi\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 \kappa^{-11/3} \left(1 - e^{-\frac{\kappa^2}{\kappa_0^2}}\right).$$

Vi beregner igjen strukturfunksjonen ved

$$D_n(s) = 8\pi \int \left(1 - \frac{\sin(\kappa s)}{\kappa s}\right) \Phi(\kappa) \kappa^2 d\kappa$$

jmført kapittel 2.2.1. Integralet over det første leddet til spektralfunksjonen er simpelthen transformasjonen av Kolmogorovspektret og vi får som resultat den opprinnelige strukturfunksjonen $C_n^2 s^{2/3}$. Integralet over det andre leddet er essensielt det samme som i kapittel 4, men med omvendt fortegn og vi får til sammen

$$D_n(s) = C_n^2 s^{2/3} - \frac{20\pi}{3\sqrt{3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{C_n^2}{\kappa_0^{2/3}} \left[{}_1F_1\left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\kappa_0 s}{2}\right)^2\right) - 1 \right].$$

Igjen skal vi se på asymptotiske verdier. For store negative argumenter gir høyeste orden til den konfluent hypergeometriske funksjonen

$${}_1F_1\left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\kappa_0 s}{2}\right)^2\right) \sim \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{3}\right)} \left[\left(\frac{\kappa_0 s}{2}\right)^2\right]^{1/3},$$

som kanselleres av $C_n^2 s^{2/3}$ leddet. Neste orden fra ${}_1F_1$ funksjonen blir da $\sim s^{-1/3}$ som overskygges av det konstante leddet som betyr at for store avstander får vi

$$D_n(s) \sim \frac{20\pi}{3\sqrt{3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 \kappa_0^{-2/3},$$

som altså tilsvare det skjematisk uttrykket $C_n^2 L_0^{2/3}$ hvis man setter

$$\kappa_0 = \left(\frac{20\pi}{3\sqrt{3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}\right)^{3/2} \frac{1}{L_0}.$$

Den numeriske faktoren evalueres til 2, 187, som ikke er så fjern fra det skjematisk 2π .

For små avstander gir rekkeutviklingen av ${}_1F_1\left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\kappa_0 s}{2}\right)^2\right) - 1 \sim s^2$ som laveste ledd, som altså overskygges av $C_n^2 s^{2/3}$ leddet, som betyr at for korte avstander får vi igjen

$$D_n(s) \sim C_n^2 s^{2/3}.$$

Vi får altså tilbake Kolmogorovs modell ved korte avstander, som ikke burde være en overraskelse, siden den eksponentielle modellen adresserer kun problemet til Kolmogorovs modell ved den øvre grensen.

5.1 Kombinasjon med Tatarskis modell

For å danne en fysikalsk modell er det en mulighet å anvende begge modifikasjoner til Kolmogorovs modell: modifikasjonen ved nedre grense tilsvarende Tatarskis modell og modifikasjonen ved øvre grense tilsvarende den eksponentielle modellen. Til sammen får man da

$$\begin{aligned}\Phi(\kappa) &= \frac{5}{18\pi\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 \kappa^{-11/3} e^{-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}} \left(1 - e^{-\frac{\kappa^2}{\kappa_0^2}}\right) \\ &= \frac{5}{18\pi\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 \kappa^{-11/3} \left(e^{-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}} - e^{-\frac{\kappa^2}{\kappa_0^2}}\right),\end{aligned}$$

der $\frac{1}{\kappa_0^2} = \frac{1}{\kappa_m^2} + \frac{1}{\kappa_0^2} \approx \frac{1}{\kappa_0^2}$. Igjen kan vi beregne strukturfunksjonen ved hjelp av integralet fra vedlegg B og vi får

$$D_n(s) = \frac{20\pi C_n^2}{3\sqrt{3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)} \left\{ \frac{1}{\kappa_m^{2/3}} \left[{}_1F_1\left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2\right) - 1 \right] - \frac{1}{\tilde{\kappa}_0^{2/3}} \left[{}_1F_1\left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\tilde{\kappa}_0 s}{2}\right)^2\right) - 1 \right] \right\}.$$

For store negative argumenter i begge konfluente hypergeometriske funksjoner får vi

$$D_n(s) \sim \frac{20\pi C_n^2}{3\sqrt{3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)} \left\{ \frac{1}{\kappa_m^{2/3}} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{3}\right)} \left[\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2 \right]^{1/3} - 1 \right] - \frac{1}{\tilde{\kappa}_0^{2/3}} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{3}\right)} \left[\left(\frac{\tilde{\kappa}_0 s}{2}\right)^2 \right]^{1/3} - 1 \right] \right\},$$

som betyr at leddene $\sim s^{2/3}$ kansellerer hverandre og man har igjen

$$D_n(s) \sim \frac{20\pi}{3\sqrt{3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 \left\{ \tilde{\kappa}_0^{-2/3} - \kappa_m^{-2/3} \right\}.$$

For små argumenter i begge konfluente hypergeometriske funksjoner finner vi fra Taylorrekken

$$D_n(s) \sim \frac{20\pi C_n^2}{3\sqrt{3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)} \left\{ \frac{1}{\kappa_m^{2/3}} \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{3}{2}} \left[-\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2 \right] - \frac{1}{\tilde{\kappa}_0^{2/3}} \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{3}{2}} \left[-\left(\frac{\tilde{\kappa}_0 s}{2}\right)^2 \right] \right\},$$

som betyr at man har igjen

$$D_n(s) \sim \frac{10\pi}{27\sqrt{3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 \left(\kappa_m^{4/3} - \tilde{\kappa}_0^{4/3} \right) s^2.$$

I et intermediært område som tilsvarende store (negative) argumenter i den første konfluente hypergeometriske funksjonen og små argumenter i den andre er de største leddene fra hver del gitt ved

$$D_n(s) \sim \frac{20\pi C_n^2}{3\sqrt{3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)} \left\{ \frac{1}{\kappa_m^{2/3}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{3}\right)} \left[\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2 \right]^{1/3} - \frac{1}{\tilde{\kappa}_0^{2/3}} \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{3}{2}} \left[-\left(\frac{\tilde{\kappa}_0 s}{2}\right)^2 \right] \right\},$$

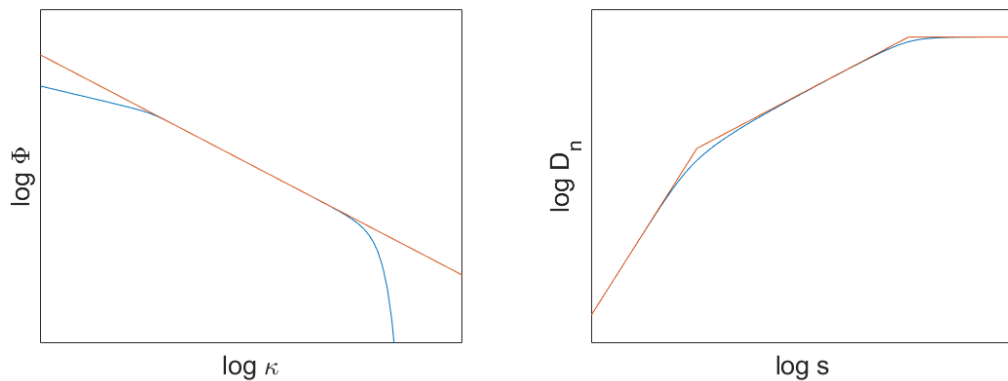
som betyr at vi har

$$D_n(s) \sim \frac{20\pi C_n^2}{3\sqrt{3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)} \left\{ \frac{1}{2^{2/3}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} - \frac{1}{18} \tilde{\kappa}_0^{4/3} s^{4/3} \right\} s^{2/3}.$$

Siden antakelsen for det intermediære området var $\tilde{\kappa}_0 s \ll 1$ ser man lett at det første leddet dominerer. Med en forenkling av uttrykket jamført kapittel 4 finner vi til slutt at

$$D_n(s) \sim C_n^2 s^{2/3}.$$

Vi har dermed generert en fysikalsk strukturfunksjon (se Figur 5.1) som er differensierbar for alle s og som reproducerer riktig potenslov i det turbulente området og har riktig avhengighet i både det dissipative og det ukorrelerte området. Videre har vi en tilsvarende spektralfunksjon som kan brukes til å beregne momentene i for eksempel Rytovapproximasjonen fordi de relevante integralene kommer til å konvergere. Det eneste problemet med modellen er at den ikke ennå beskriver eksperimentelle verdier på tilfredsstillende måte. Vi kommer derfor til å diskutere enda flere atmosfæremodeller.



Figur 5.1 Venstre side: modifisert (ved både øvre og nedre grense) spektralfunksjon (blå linje) sammenliknet med Kolmogorovspektret (rød strek). Høyre side: tilsvarende strukturfunksjon (blå linje) sammenliknet med skjematisk strukturfunksjon fra kapittel 3.3 (røde streker).

6 von Kármáns modell

von Kármáns modell er ikke så mye en forbedring med tanke på å beskrive eksperimentelle verdier, men med tanke på å oppnå bedre konvergens. Som man allerede kan se i Figur 5.1, så tilsvarer spektralfunksjonen fortsatt en potenslov for små κ . Det samme finner man når man utvikler faktoren som beskriver dempningen for små κ i sin Taylorrekke ved

$$1 - e^{-\frac{\kappa^2}{\kappa_0^2}} \sim \frac{\kappa^2}{\kappa_0^2},$$

som sammen med den ellers $\kappa^{-11/3}$ avhengigheten gir en $\kappa^{-5/3}$ avhengighet for små κ . Denne dempningen er altså tilstrekkelig for at det viktige integralet over $\kappa\Phi(\kappa)$ konvergerer (se diskusjonen i kapittel 3.3), men et integral over for eksempel kun $\Phi(\kappa)$ konvergerer altså ikke. Måten for å oppnå bedre konvergens er å konstruere en annen dempning for små verdier av κ . Problemet med Kolmogorovspektret er jo at det har en pol ved $\kappa = 0$. I von Kármáns modell er dette problemet løst ved at polen blir forskjøvet vekk fra dette punktet. En mulighet kunne vært å forskyve polen mot negative verdier ved å erstatte $\kappa^{-11/3}$ med for eksempel $(\kappa + \kappa_0)^{-11/3}$. Imidlertid viser det seg å være mere hensiktsmessig å forskyve polen langs den imaginære akse og fortsatt ha forsvinnende reell del ved å erstatte $\kappa^{-11/3}$ med $(\kappa^2 + \kappa_0^2)^{-11/6}$. Dempningen for store κ blir den samme som i Tatarskis modell og dermed er von Kármáns modell gitt ved

$$\Phi(\kappa) = \frac{5}{18\pi\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{C_n^2}{(\kappa^2 + \kappa_0^2)^{11/6}} e^{-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}}.$$

Problemet med denne spektralfunksjonen er at strukturfunksjonen ikke kan beregnes analytisk. Integralet

$$D_n(s) = 8\pi \int \left(1 - \frac{\sin(\kappa s)}{\kappa s}\right) \Phi(\kappa) \kappa^2 d\kappa.$$

har nemlig ikke noe kompakt løsning.

For å allikevel gjøre noe fremskritt innser vi at spektralfunksjonen igjen kan deles i tre områder, et ukorrelert område der $\kappa < \kappa_0$, et turbulent område der $\kappa_0 < \kappa < \kappa_m$ og et dissipativt område der $\kappa_m < \kappa$. Under antakelsen $\kappa_0 \ll \kappa$ eller formelt $\kappa_0 \rightarrow 0$ blir von Kármáns modell lik Tatarskis modell som vi allerede vet at beskriver det turbulente og dissipative området (se kapittel 4). Vi skal derfor undersøke von Kármáns modell under antakelsen $\kappa \ll \kappa_m$ eller formelt $\kappa_m \rightarrow \infty$ for å finne ut om den tilnærmete modellen også gir en god beskrivelse av det turbulente og ukorrelerte området. Utgangspunkt for denne undersøkelsen er altså det forenklete uttrykket

$$\Phi(\kappa) = \frac{5}{18\pi\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{C_n^2}{(\kappa^2 + \kappa_0^2)^{11/6}},$$

der vi heller ikke skal beregne strukturfunksjonen direkte, men korrelasjonsfunksjonen, siden det nå er mulig på grunn av bedre konvergens egenskaper til spektralfunksjonen og fordi integralet blir enklere å løse. Jamført kapittel 2.2 skal vi altså beregne

$$R_n(s) = \frac{4\pi}{s} \int \sin(\kappa s) \Phi(\kappa) \kappa d\kappa.$$

Med den forenklete spektralfunksjonen får vi integralet

$$R_n(s) = \frac{10}{9\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 s^{2/3} \int \frac{(\kappa s) \sin(\kappa s)}{[(\kappa s)^2 + (\kappa_0 s)^2]^{11/6}} d(\kappa s),$$

som evalueres til

$$R_n(s) = \frac{10}{9\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 s^{2/3} \sqrt{\pi} (\kappa_0 s) (2\kappa_0 s)^{-4/3} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} K_{-\frac{1}{3}}(\kappa_0 s),$$

der $K_{-\frac{1}{3}}$ er en modifisert Besselfunksjon av andre type. Uttrykket kan forenkles med litt algebra. Videre kan vi redusere gammafunksjonen ved hjelp av vedlegg A til

$$\Gamma\left(\frac{11}{6}\right) = \frac{5\pi}{3\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}.$$

Siden den modifiserte Besselfunksjonen av andre type er symmetrisk med tanke på sin orden, kan vi altså skrive til sammen

$$R_n(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{3 \cdot 2^{1/3} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 \left(\frac{s}{\kappa_0}\right)^{1/3} K_{\frac{1}{3}}(\kappa_0 s).$$

Ved hjelp av doblingsformelen har vi dessuten funnet i kapittel 4 at

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \sqrt{\frac{3}{\pi}} 2^{-1/3},$$

som kan brukes til å forenkle korrelasjonsfunksjonen videre til

$$R_n(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{3} \cdot 2^{2/3} \pi} C_n^2 \left(\frac{s}{\kappa_0}\right)^{1/3} K_{\frac{1}{3}}(\kappa_0 s),$$

der den numeriske faktoren evalueres til 0,310.

I første omgang skal vi nå beregne $R_n(0)$ for å kunne konstruere strukturfunksjonen for et isotropt stokastisk felt med forsvinnende middelvei jamført kapittel 2.1.3 ved

$$D_n(s) = 2 [R_n(0) - R_n(s)].$$

For å gjøre dette, uttrykker vi den modifiserte Besselfunksjonen av andre type ved to modifiserte Besselfunksjoner av første type $I_r(z)$ ved

$$K_r(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-r}(z) - I_r(z)}{\sin(r\pi)}.$$

Her ser man også veldig enkelt at den modifiserte Besselfunksjonen av andre type er symmetrisk med tanke på sin orden. Hvis vi nå ser på potensrekkeutviklingen til de to modifiserte Besselfunksjonene av første type, så får vi i laveste orden

$$K_{\frac{1}{3}}(\kappa_0 s) \sim \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \left(\frac{\kappa_0 s}{2}\right)^{-1/3} - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \left(\frac{\kappa_0 s}{2}\right)^{1/3} \right],$$

som gjør at korrelasjonsfunksjonen i laveste orden blir

$$R_n(s) \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{3} \cdot 2^{2/3} \pi} C_n^2 \left(\frac{s}{\kappa_0}\right)^{1/3} \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \left(\frac{\kappa_0 s}{2}\right)^{-1/3} - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \left(\frac{\kappa_0 s}{2}\right)^{1/3} \right].$$

Dette kan i første omgang forenkles til

$$R_n(s) \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3} C_n^2 \left[\frac{1}{2^{1/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \kappa_0^{-2/3} - \frac{1}{2 \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} s^{2/3} \right].$$

Videre kan vi redusere gammafunksjonene ved hjelp av vedlegg A for å endelig få

$$R_n(s) \sim \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{3} \cdot 2^{4/3} \pi \kappa_0^{2/3}} \frac{C_n^2}{2} - \frac{1}{2} C_n^2 s^{2/3}.$$

Med dette resultatet kan vi nå både konstruere strukturfunksjonen ved

$$D_n(s) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{3} \cdot 2^{1/3} \pi \kappa_0^{2/3}} \frac{C_n^2}{2} - \frac{2^{1/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{3} \pi} C_n^2 \left(\frac{s}{\kappa_0}\right)^{1/3} K_{\frac{1}{3}}(\kappa_0 s)$$

og et asymptotisk uttrykk for $s \ll \kappa_0^{-1}$, som viser seg å være det vanlige

$$D_n(s) \sim C_n^2 s^{2/3}.$$

Dermed har vi vist at den forenklete modellen gir en god beskrivelse av det turbulente område.

For å undersøke det ukorrelerte området skal vi undersøke strukturfunksjonen

$$D_n(s) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{3} \cdot 2^{1/3} \pi \kappa_0^{2/3}} \frac{C_n^2}{2} \left[1 - \frac{2^{2/3}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} (\kappa_0 s)^{1/3} K_{\frac{1}{3}}(\kappa_0 s) \right]$$

for $s \gg \kappa_0^{-1}$. For store argumenter til den modifiserte Besselfunksjonen av andre type har vi

$$K_{\frac{1}{3}}(\kappa_0 s) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2 \kappa_0 s}} e^{-\kappa_0 s},$$

som gjør at strukturfunksjonen nærmer seg det konstante uttrykket

$$D_n(s) \sim \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{3} \cdot 2^{1/3} \pi} C_n^2 \kappa_0^{-2/3}.$$

Dette tilsvarer det skjematisk uttrykket $C_n^2 L_0^{2/3}$ hvis man setter

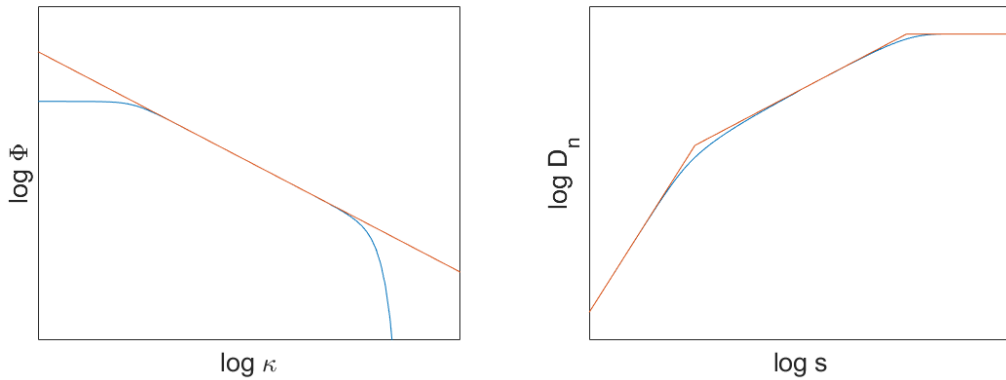
$$\kappa_0 = \left(\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{3} \cdot 2^{1/3} \pi} \right)^{3/2} \frac{1}{L_0},$$

der den numeriske faktoren evalueres til 1,071, som fortsatt er i samme størrelsesorden som det skjematiskke 2π .

Dette betyr at selv om vi ikke har klart å beregne et kompakt uttrykk for strukturfunksjonen, så har vi utledet to deluttrykk som gir identiske approksimasjoner i området der $\kappa_m^{-1} \ll s \ll \kappa_0^{-1}$. Vi kan dermed skrive

$$D_n(s) \approx \begin{cases} \frac{20\pi}{3\sqrt{3}\Gamma^2(\frac{1}{3})} \frac{C_n^2}{\kappa_m^{2/3}} \left[{}_1F_1\left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2\right) - 1 \right] & \text{for } s < s_i \\ \frac{\Gamma^2(\frac{1}{3})}{\sqrt{3}2^{1/3}\pi} \frac{C_n^2}{\kappa_0^{2/3}} \left[1 - \frac{2^{2/3}}{\Gamma(\frac{1}{3})} (\kappa_0 s)^{1/3} K_{\frac{1}{3}}(\kappa_0 s) \right] & \text{for } s \geq s_i, \end{cases}$$

der s_i er en egnet intermediær verdi med $\kappa_m^{-1} \ll s_i \ll \kappa_0^{-1}$. Denne tilnærmete strukturfunksjonen og spektralfunksjonen til von Kármáns modell er produsert i Figur 6.1. Her kan man også fint se ved å sammenlikne med Figur 5.1 at spektralfunksjonen til von Kármáns modell har bedre konvergenssegenskaper for små κ enn den eksponentielle modellen uten at strukturfunksjonen blir dårligere av den grunnen.



Figur 6.1 Venstre side: spektralfunksjonen til von Kármáns modell (blå linje) sammenliknet med Kolmogorovspektret (rød strek). Høyre side: strukturfunksjonen til von Kármáns modell (blå linje) sammenliknet med skjematisk strukturfunksjon fra kapittel 3.3 (røde streker).

Som en liten anmerkning, så approksimeres det nedre uttrykket i boken til Andrews og Phillips for små $\kappa_0 s$ ved å først tilnærme den modifiserte Besselfunksjonen av andre type ved kun én modifisert Besselfunksjon av første type

$$K_{\frac{1}{3}}(\kappa_0 s) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\frac{1}{3}}(\kappa_0 s) - I_{\frac{1}{3}}(\kappa_0 s)}{\sin(\frac{\pi}{3})} \sim \frac{\pi}{2 \sin(\frac{\pi}{3})} I_{-\frac{1}{3}}(\kappa_0 s).$$

Deretter erstattes den modifiserte Besselfunksjonen av første type med en generalisert hypergeometrisk funksjon ved

$$\begin{aligned} \frac{2^{2/3}}{\Gamma(\frac{1}{3})} (\kappa_0 s)^{1/3} K_{\frac{1}{3}}(\kappa_0 s) &\sim \frac{2^{2/3}}{\Gamma(\frac{1}{3})} (\kappa_0 s)^{1/3} \frac{\pi}{2 \sin(\frac{\pi}{3})} I_{-\frac{1}{3}}(\kappa_0 s) = \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{\kappa_0 s}{2}\right)^{1/3} I_{-\frac{1}{3}}(\kappa_0 s) \\ &= {}_0F_1\left(-; \frac{2}{3}; \left(\frac{\kappa_0 s}{2}\right)^2\right), \end{aligned}$$

som betyr at hele det nedre uttrykket kan skrives analogt til det øvre uttrykket ved

$$\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{3} 2^{1/3} \pi} \frac{C_n^2}{\kappa_0^{2/3}} \left[1 - {}_0F_1\left(-; \frac{2}{3}; \left(\frac{\kappa_0 s}{2}\right)^2\right) \right].$$

Men, som den oppmerksomme leseren sikkert allerede har fått med seg, så gir dette uttrykket ikke så mye mening, siden det er en approksimasjon for små $\kappa_0 s$, mens det opprinnelige uttrykket som blir approksimert skal jo også gjelde for $s \gg \kappa_0^{-1}$, det vil si for $\kappa_0 s \gg 1$.

7 Modifisert atmosfærisk modell

Frem til nå har vi egentlig ikke ennå tatt hensyn til eksperimentelle målinger. Visstnok indikerer slike målinger en liten (relativ) topp i spektralfunksjonen ved bølgetall rund κ_m . Denne toppen kan modelleres ved å modifisere for eksempel von Kármáns modell til

$$\Phi(\kappa) = \frac{5}{18\pi\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \left[1 + a_1 \left(\frac{\kappa}{\kappa_m}\right) - a_2 \left(\frac{\kappa}{\kappa_m}\right)^{7/6} \right] \frac{C_n^2}{(\kappa^2 + \kappa_0^2)^{11/6}} e^{-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}},$$

der de to nye leddene er introdusert på fenomenologisk grunnlag. Her sitter man nå igjen med samme problem som med von Kármáns modell, ved at det ikke blir mulig å utlede et kompakt uttrykk for strukturfunksjonen. Men som før, så kan vi identifisere tre områder: et ukorrelert område der $\kappa < \kappa_0$, et turbulent område der $\kappa_0 < \kappa < \kappa_m$ og et dissipativt område der $\kappa_m < \kappa$. Og igjen, under antakelsen $\kappa \ll \kappa_m$ eller formelt $\kappa_m \rightarrow \infty$ får vi en god approksimasjon for den nedre delen av det turbulente området pluss hele det ukorrelerte området – i praksis den samme delen av strukturfunksjonen som i von Kármáns modell. På den andre siden, under antakelsen $\kappa_0 \ll \kappa$ eller formelt $\kappa_0 = 0$ burde vi få en god approksimasjon for den øvre delen av det turbulente området pluss hele det dissipative området. Det er denne delen av strukturfunksjonen som vi kommer til å beregne i det følgende.

Utgangspunktet er altså approksimasjonen

$$\Phi(\kappa) = \frac{5}{18\pi\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \left[1 + a_1 \left(\frac{\kappa}{\kappa_m}\right) - a_2 \left(\frac{\kappa}{\kappa_m}\right)^{7/6} \right] \frac{C_n^2}{\kappa^{11/3}} e^{-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}},$$

som vi skal transformere med det vanlige

$$D_n(s) = 8\pi \int \left(1 - \frac{\sin(\kappa s)}{\kappa s} \right) \Phi(\kappa) \kappa^2 d\kappa.$$

jamført kapittel 2.2.1. Vi innser fort at dette fører til tre integraler gitt ved

$$\begin{aligned} D_n(s) &= \frac{20}{9\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 s^{2/3} \left[\int (\kappa s)^{-5/3} e^{-\frac{(\kappa s)^2}{(\kappa_m s)^2}} \left(1 - \frac{\sin(\kappa s)}{(\kappa s)} \right) d(\kappa s) \right. \\ &\quad + \frac{a_1}{(\kappa_m s)} \int (\kappa s)^{-2/3} e^{-\frac{(\kappa s)^2}{(\kappa_m s)^2}} \left(1 - \frac{\sin(\kappa s)}{(\kappa s)} \right) d(\kappa s) \\ &\quad \left. - \frac{a_2}{(\kappa_m s)^{7/6}} \int (\kappa s)^{-1/2} e^{-\frac{(\kappa s)^2}{(\kappa_m s)^2}} \left(1 - \frac{\sin(\kappa s)}{(\kappa s)} \right) d(\kappa s) \right]. \end{aligned}$$

Alle tre integraler kan evalueres ved hjelp av vedlegg B og vi får

$$\begin{aligned} D_n(s) &= \frac{10}{9\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 s^{2/3} \left[(\kappa_m s)^{-2/3} \Gamma\left(-\frac{1}{3}\right) \left\{ 1 - {}_1F_1\left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2\right) \right\} \right. \\ &\quad + \frac{a_1}{(\kappa_m s)} (\kappa_m s)^{1/3} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \left\{ 1 - {}_1F_1\left(\frac{1}{6}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2\right) \right\} \\ &\quad \left. - \frac{a_2}{(\kappa_m s)^{7/6}} (\kappa_m s)^{1/2} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \left\{ 1 - {}_1F_1\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2\right) \right\} \right]. \end{aligned}$$

Ved hjelp av vedlegg A finner vi (som i kapittel 4) $\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}$, som gjør at vi kan forenkle uttrykket til

$$D_n(s) = \frac{20\pi}{3\sqrt{3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{C_n^2}{\kappa_m^{2/3}} \left[\left\{ {}_1F_1\left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2\right) - 1 \right\} \right. \\ \left. + a_1 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{2\sqrt{3}\pi} \left\{ 1 - {}_1F_1\left(\frac{1}{6}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2\right) \right\} \right. \\ \left. - a_2 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\sqrt{3}\pi} \left\{ 1 - {}_1F_1\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2\right) \right\} \right],$$

der de tre numeriske faktorene evalueres til henholdsvis 1,685 (som i kapittel 4), $1,370 a_1$ og $0,892 a_2$. Som en liten anmerkning, så ser det ut at i boken til Andrews og Phillips så er den tredje numeriske verdien feil (den er for liten med omtrent en faktor π^{-1}).

Som vanlig skal vi utlede asymptotiske uttrykk for $\kappa_m s \gg 1$ altså det turbulente området og for $\kappa_m s \ll 1$, som er det dissipative området. Vi begynner med det turbulente området og finner asymptotiske uttrykk til de konfluent hypergeometriske funksjonene ved

$${}_1F_1\left(a; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2\right) \sim \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-a\right)} \left[\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2\right]^{-a} & \text{for } a < 0 \\ 0 & \text{for } a > 0. \end{cases}$$

Det betyr at den første funksjonen gir bidraget av høyeste orden, som er

$$D_n(s) \sim \frac{20\pi}{3\sqrt{3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{C_n^2}{\kappa_m^{2/3}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{3}\right)} \left[\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2\right]^{1/3},$$

og som på samme måte som i kapittel 4 kan forenkles til det vanlige

$$D_n(s) \sim C_n^2 s^{2/3}.$$

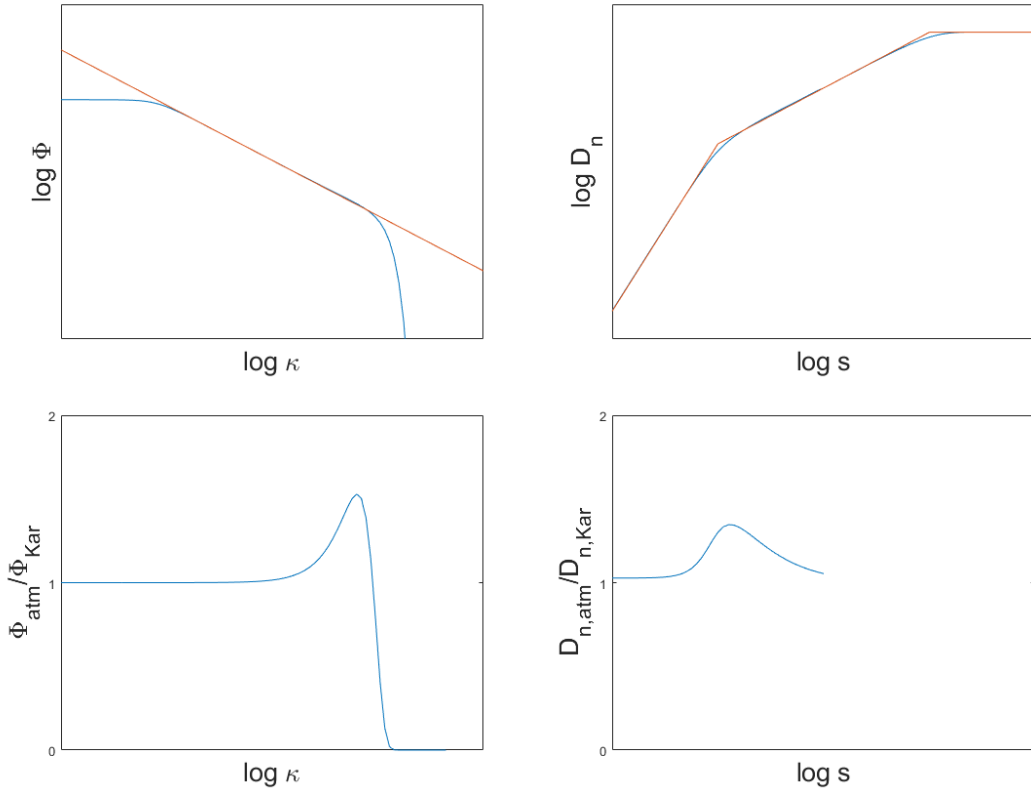
Vi vet nå altså at vi får en god beskrivelse av det turbulente området.

Når vi ser på det dissipative området med $\kappa_m s \ll 1$, så ser vi på potensrekkeutviklingen til de konfluent hypergeometriske funksjonene der laveste orden er gitt ved

$${}_1F_1\left(a; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2\right) \sim 1 + \frac{a}{\frac{3}{2}} \left[-\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2\right],$$

som betyr at alle tre funksjoner gir bidrag $\sim s^2$ og vi får

$$D_n(s) \sim \frac{20\pi}{3\sqrt{3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 \kappa_m^{4/3} s^2 \left[\frac{1}{18} + a_1 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{2\sqrt{3}\pi} \frac{1}{36} - a_2 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\sqrt{3}\pi} \frac{1}{24} \right],$$



Figur 7.1 Øvre rad: spektralfunksjon (venstre) og strukturfunksjon (høyre) til den modifiserte atmosfæriske modellen (blå linjer) sammenliknet med henholdsvis Kolmogorovspektret og den skjematisk strukturfunksjonen fra kapittel 3.3 (røde streker). Nedre rad: spektralfunksjonen (venstre) og strukturfunksjonen (høyre) til den modifiserte atmosfæriske modellen relativ til von Kármáns modell.

som kan forenkles til

$$D_n(s) \sim \frac{10\pi}{27\sqrt{3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 \kappa_m^{4/3} s^2 \left[1 + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{8\sqrt{3}\pi} \left(2\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) a_1 - 3\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) a_2 \right) \right].$$

Dette tilsvarer det skjematisk uttrykket $C_n^2 l_0^{-4/3} s^2$ hvis vi setter

$$\kappa_m = \left\{ \frac{324\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{40\sqrt{3}\pi + 5\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \left[2\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) a_1 - 3\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) a_2 \right]} \right\}^{3/4} \frac{1}{l_0}.$$

For vanlige verdier til koeffisientene, det vil si for $a_1 = 1,802$ og $a_2 = 0,254$ evalueres hele den numeriske faktoren til 3,431, som er omtrent halvparten av det skjematisk 2π .

Til sammen ender vi altså opp igjen med en todelt strukturfunksjon, der vi har for store avstander

$s_i \leq s$ det samme som for von Kármáns modell, nemlig

$$D_n(s) \approx \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{3} 2^{1/3} \pi \kappa_0^{2/3}} \frac{C_n^2}{\kappa_0^{2/3}} \left[1 - \frac{2^{2/3}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} (\kappa_0 s)^{1/3} K_{\frac{1}{3}}(\kappa_0 s) \right],$$

mens for små avstander $s < s_i$, så har vi funnet

$$D_n(s) \approx \frac{20\pi}{3\sqrt{3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{C_n^2}{\kappa_m^{2/3}} \left[\left\{ {}_1F_1\left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2\right) - 1 \right\} \right. \\ \left. + a_1 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{2\sqrt{3}\pi} \left\{ 1 - {}_1F_1\left(\frac{1}{6}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2\right) \right\} \right. \\ \left. - a_2 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\sqrt{3}\pi} \left\{ 1 - {}_1F_1\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2\right) \right\} \right].$$

Den intermediære verdien s_i ligger i det turbulente området, det vil si vi har $\kappa_m^{-1} \ll s_i \ll \kappa_0^{-1}$. Den modifiserte atmosfæriske modellen er produsert i Figur 7.1 og en sammenlikning er gitt med von Kármáns modell.

7.1 Alternativ dempning ved øvre grense

Som alternativ for dempning i det ukorrelerte området kan man også bruke dempningen tilsvarende den eksponentielle modellen fra kapittel 5. Her blir spektralfunksjonen modifisert til

$$\Phi(\kappa) = \frac{5}{18\pi\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \left[1 + a_1 \left(\frac{\kappa}{\kappa_m}\right) - a_2 \left(\frac{\kappa}{\kappa_m}\right)^{7/6} \right] \frac{C_n^2}{\kappa^{11/3}} e^{-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}} \left(1 - e^{-\frac{\kappa^2}{\kappa_0^2}} \right) \\ = \frac{5}{18\pi\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \left[1 + a_1 \left(\frac{\kappa}{\kappa_m}\right) - a_2 \left(\frac{\kappa}{\kappa_m}\right)^{7/6} \right] \frac{C_n^2}{\kappa^{11/3}} \left(e^{-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}} - e^{-\frac{\kappa^2}{\kappa_0^2}} \right),$$

der vi igjen har $\frac{1}{\kappa_0^2} = \frac{1}{\kappa_m^2} + \frac{1}{\kappa_0^2} \approx \frac{1}{\kappa_0^2}$ jmført kapittel 5.1. Fordelen med denne dempningen er at vi kan beregne kompakte uttrykk for hele strukturfunksjonen. Hvis vi nemlig beregner strukturfunksjonen ved det vanlige

$$D_n(s) = 8\pi \int \left(1 - \frac{\sin(\kappa s)}{\kappa s} \right) \Phi(\kappa) \kappa^2 d\kappa,$$

så finner vi ganske fort ved hjelp av vedlegg B at

$$\begin{aligned}
D_n(s) = & \frac{10}{9\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 s^{2/3} \left\{ \Gamma\left(-\frac{1}{3}\right) \left((\kappa_m s)^{-2/3} \left[1 - {}_1F_1\left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2\right) \right] \right. \right. \\
& \left. \left. - (\tilde{\kappa}_0 s)^{-2/3} \left[1 - {}_1F_1\left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\tilde{\kappa}_0 s}{2}\right)^2\right) \right] \right) \right. \\
& + a_1 (\kappa_m s)^{-1} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \left((\kappa_m s)^{1/3} \left[1 - {}_1F_1\left(\frac{1}{6}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2\right) \right] \right. \\
& \left. \left. - (\tilde{\kappa}_0 s)^{1/3} \left[1 - {}_1F_1\left(\frac{1}{6}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\tilde{\kappa}_0 s}{2}\right)^2\right) \right] \right) \right. \\
& - a_2 (\kappa_m s)^{-7/6} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \left((\kappa_m s)^{1/2} \left[1 - {}_1F_1\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2\right) \right] \right. \\
& \left. \left. - (\tilde{\kappa}_0 s)^{1/2} \left[1 - {}_1F_1\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\tilde{\kappa}_0 s}{2}\right)^2\right) \right] \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Ved hjelp av vedlegg A finner vi (på samme måte som i kapittel 4) at $\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}$ og vi kan forenkle uttrykket til

$$\begin{aligned}
D_n(s) = & \frac{20\pi}{3\sqrt{3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{C_n^2}{\kappa_m^{2/3}} \left\{ \left[{}_1F_1\left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2\right) - 1 \right] - \left(\frac{\kappa_m}{\tilde{\kappa}_0}\right)^{2/3} \left[{}_1F_1\left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\tilde{\kappa}_0 s}{2}\right)^2\right) - 1 \right] \right. \\
& + a_1 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{2\sqrt{3}\pi} \left(\left[1 - {}_1F_1\left(\frac{1}{6}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2\right) \right] - \left(\frac{\tilde{\kappa}_0}{\kappa_m}\right)^{1/3} \left[1 - {}_1F_1\left(\frac{1}{6}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\tilde{\kappa}_0 s}{2}\right)^2\right) \right] \right) \\
& \left. - a_2 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\sqrt{3}\pi} \left(\left[1 - {}_1F_1\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2\right) \right] - \left(\frac{\tilde{\kappa}_0}{\kappa_m}\right)^{1/2} \left[1 - {}_1F_1\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{\tilde{\kappa}_0 s}{2}\right)^2\right) \right] \right) \right\},
\end{aligned}$$

der de numeriske faktorene er som før.

For store avstander bidrar kun de konfluente hypergeometriske funksjonene der første argument er negativ, og vi får

$$\begin{aligned}
D_n(s) \sim & \frac{20\pi}{3\sqrt{3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{C_n^2}{\kappa_m^{2/3}} \left\{ \left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} \left[\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^{1/3} - 1 \right] - \left(\frac{\kappa_m}{\tilde{\kappa}_0}\right)^{2/3} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} \left[\left(\frac{\tilde{\kappa}_0 s}{2}\right)^{1/3} - 1 \right] \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + a_1 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{2\sqrt{3}\pi} \left(1 - \left(\frac{\tilde{\kappa}_0}{\kappa_m}\right)^{1/3} \right) - a_2 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\sqrt{3}\pi} \left(1 - \left(\frac{\tilde{\kappa}_0}{\kappa_m}\right)^{1/2} \right) \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Her ser vi at leddene $\sim s^{2/3}$ kansellerer hverandre og man ender opp med det konstante leddet

$$D_n(s) \sim \frac{20\pi}{3\sqrt{3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{C_n^2}{\tilde{\kappa}_0^{2/3}} \times \left\{ 1 - \left(\frac{\tilde{\kappa}_0}{\kappa_m}\right)^{2/3} + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2\sqrt{3}\pi} \left(\frac{\tilde{\kappa}_0}{\kappa_m}\right)^{2/3} \left[a_1 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \left(1 - \left(\frac{\tilde{\kappa}_0}{\kappa_m}\right)^{1/3}\right) - a_2 \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \left(1 - \left(\frac{\tilde{\kappa}_0}{\kappa_m}\right)^{1/2}\right) \right] \right\}.$$

For små avstander finner vi fra Taylorrekken

$$D_n(s) \sim \frac{20\pi}{3\sqrt{3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{C_n^2}{\kappa_m^{2/3}} \left\{ \left(-\frac{1}{3} \left[-\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2 \right] - \left(\frac{\kappa_m}{\tilde{\kappa}_0}\right)^{2/3} -\frac{1}{3} \left[-\left(\frac{\tilde{\kappa}_0 s}{2}\right)^2 \right] \right) \right. \\ \left. + a_1 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{2\sqrt{3}\pi} \left(-\frac{1}{6} \left[-\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2 \right] - \left(\frac{\tilde{\kappa}_0}{\kappa_m}\right)^{1/3} \left(-\frac{1}{6} \right) \left[-\left(\frac{\tilde{\kappa}_0 s}{2}\right)^2 \right] \right) \right. \\ \left. - a_2 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\sqrt{3}\pi} \left(-\frac{1}{4} \left[-\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2 \right] - \left(\frac{\tilde{\kappa}_0}{\kappa_m}\right)^{1/2} \left(-\frac{1}{4} \right) \left[-\left(\frac{\tilde{\kappa}_0 s}{2}\right)^2 \right] \right) \right\},$$

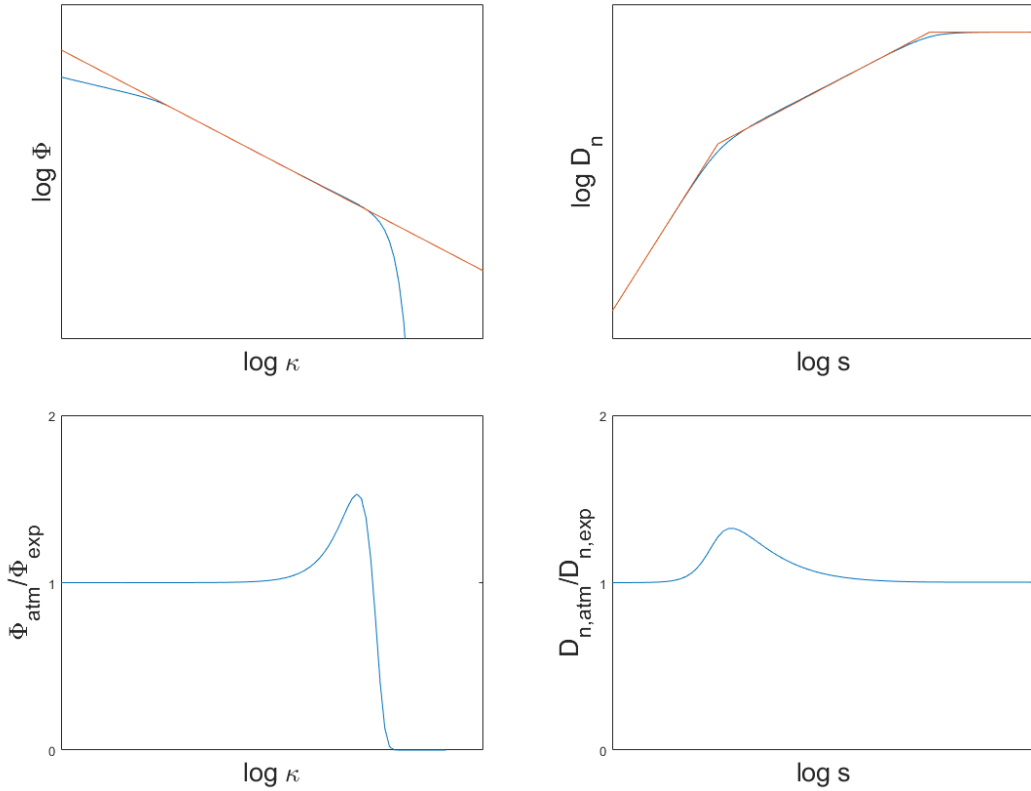
som kan forenkles til

$$D_n(s) \sim \frac{10\pi}{27\sqrt{3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 \kappa_m^{4/3} s^2 \times \left\{ \left(1 - \left(\frac{\tilde{\kappa}_0}{\kappa_m}\right)^{4/3} \right) + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{8\sqrt{3}\pi} \left(2\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) a_1 \left(1 - \left(\frac{\tilde{\kappa}_0}{\kappa_m}\right)^{7/3} \right) - 3\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) a_2 \left(1 - \left(\frac{\tilde{\kappa}_0}{\kappa_m}\right)^{5/2} \right) \right) \right\}$$

og som har den vanlige $\sim s^2$ avhengigheten.

For intermediære avstander, som tilsvarer store verdier av $\kappa_m s$ og små verdier av $\tilde{\kappa}_0 s$ er de største leddene fra hver av de seks hakeparentesene gitt ved

$$D_n(s) \sim \frac{20\pi}{3\sqrt{3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{C_n^2}{\kappa_m^{2/3}} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} \left[\left(\frac{\kappa_m s}{2}\right)^2 \right]^{1/3} - \left(\frac{\kappa_m}{\tilde{\kappa}_0}\right)^{2/3} -\frac{1}{3} \left[-\left(\frac{\tilde{\kappa}_0 s}{2}\right)^2 \right] \right. \\ \left. + a_1 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{2\sqrt{3}\pi} \left(1 - \left(\frac{\tilde{\kappa}_0}{\kappa_m}\right)^{1/3} \left(-\frac{1}{6} \right) \left[-\left(\frac{\tilde{\kappa}_0 s}{2}\right)^2 \right] \right) \right. \\ \left. - a_2 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\sqrt{3}\pi} \left(1 - \left(\frac{\tilde{\kappa}_0}{\kappa_m}\right)^{1/2} \left(-\frac{1}{4} \right) \left[-\left(\frac{\tilde{\kappa}_0 s}{2}\right)^2 \right] \right) \right\},$$



Figur 7.2 Øvre rad: spektralfunksjon (venstre) og strukturfunksjon (høyre) til den modifiserte atmosfæriske modellen med alternativ damping (blå linjer) sammenliknet med henholdsvis Kolmogorovspektret og den skjematisk strukturfunksjonen fra kapittel 3.3 (røde streker). Nedre rad: spektralfunksjonen (venstre) og strukturfunksjonen (høyre) til den modifiserte atmosfæriske modellen med alternativ damping relativ til den kombinerte modellen fra kapittel 5.1.

som kan forenkles til

$$D_n(s) \sim \frac{20\pi}{3\sqrt{3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 s^{2/3} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2^{2/3}\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} - \frac{1}{18} (\tilde{\kappa}_0 s)^{4/3} \right. \\ \left. + a_1 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{2\sqrt{3}\pi} \frac{1}{(\kappa_m s)^{2/3}} \left(1 - \frac{1}{36} \left(\frac{\tilde{\kappa}_0}{\kappa_m}\right)^{1/3} (\tilde{\kappa}_0 s)^2\right) \right. \\ \left. - a_2 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\sqrt{3}\pi} \frac{1}{(\kappa_m s)^{2/3}} \left(1 - \frac{1}{24} \left(\frac{\tilde{\kappa}_0}{\kappa_m}\right)^{1/2} (\tilde{\kappa}_0 s)^2\right) \right\}.$$

Antakelsen for det intermediaære området var $\tilde{\kappa}_0 s \ll 1$ og $\kappa_m s \gg 1$, som betyr at ut av de seks leddene innenfor klammeparentesen, så dominerer det første (det konstante) leddet. Dermed er

strukturfunksjonen i det intermediære området gitt ved

$$D_n(s) \sim \frac{20\pi}{3\sqrt{3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2^{2/3}\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} C_n^2 s^{2/3},$$

som på samme måte som i kapittel 4 kan forenkles til det vanlige

$$D_n(s) \sim C_n^2 s^{2/3}.$$

Vi har dermed funnet en kompakt strukturfunksjon som er kontinuerlig og differensierbar (se Figur 7.2). Strukturfunksjonen reproducerer riktig potenslov i det turbulente området og har riktig asymptotisk oppførsel i både det dissipative og det ukorrelerte området. Videre reproducerer spektralfunksjonen eksperimentelle verdier på tilfredsstillende måte. Det eneste som ikke er så fint med spektralfunksjonen er at den har litt dårlige konvergenssegenskaper for $\kappa \rightarrow 0$ jamført diskusjonen i kapittel 6.

7.2 Andre fenomenologiske modifikasjoner

Det er klart at hvis man begynner med fenomenologiske modifikasjoner av spektralfunksjonen, så finnes det ikke noe naturlig endepunkt lenger. Spesielt i det turbulente området har man, i tillegg til toppen som er diskutert her, prøvd ut mange modifikasjoner for å tilpasse formelen til eksperimentelle observasjoner. De mest diskuterte modifikasjonene gjelder eksponenten til spektralfunksjonen. Mens Kolmogorovspektret har en $-\frac{11}{3}$ potenslov, som er basert på dimensjonsanalyse, så har man i den senere tiden også prøvd andre eksponenter – gjerne i område fra -3 til -5 . Stort sett kan man si at på lik linje med toppen som vi har diskutert her, så er ingen av de modifikasjonene spesielt iøynefallende på en dobbel logaritmisk graf av den typen som vi har produsert her for de forskjellige modellene (se Figur 7.1 og Figur 7.2). Grovt sett handler det seg altså om forholdsvis mindre modifikasjoner for å beskrive relativt små avvik fra Kolmogorovs modell. Heller ikke er det klart hvor bra alle slike modifikasjoner kan begrunnes fysikalsk, altså ved en mekanisme som ligger i bunnen for disse modifikasjonene. For den modifiserte atmosfæriske modellen kan man i hvert fall argumentere på den følgende måten. Dissipative effekter blir relevant rundt den nedre grensen til strukturfunksjonen (altså ved κ_m i spektralfunksjonen). Dermed kan det tenkes at dette skaper bobler i akkurat denne størrelsen med forhøyet temperatur på grunn av dissipasjon. Disse fluktuasjonene kommer i så fall i tillegg til de andre mekanismene som skaper optisk turbulens (se kapittel 3.2).

Uansett kan det være relevant å se på en eller flere modifiserte modeller i en senere rapport hvis det skulle vise seg at disse modellene gir en markant forbedring av resultatene. Men for nå avslutter vi diskusjonen av atmosfæriske modeller og vender blikket videre til faktiske beregninger.

8 Forventningsverdier

I del I av rapportserien har vi diskutert tre generelle forventningsverdier til strålingsfeltet, som er midlet feltstyrke, andregrads korrelasjonsfunksjon og fjerdegrads korrelasjonsfunksjon. Av disse tre peker spesielt den første funksjonen seg ut, siden midlet feltstyrke er et universelt resultat. Vi finner nemlig i del I av rapportserien at

- både Rytov- og Markovapproksimasjonen gir samme resultat for midlet feltstyrke,
- resultat for midlet feltstyrke ikke avhenger av stråleparameterne, det vil si man får samme resultat for en planbølge, en sfærisk bølge og en paraksial Gaußstråle,
- resultatet er uavhengig av noen transvers koordinat, det vil si man får en felles demping av midlet feltstyrke for hele detektorplanet.

Disse egenskapene gjør det attraktivt å beregne midlet feltstyrke. På den andre siden har man også en del ulemper knyttet til midlet feltstyrke. Vi vet nemlig at midlet feltstyrke er

- i mye større grad avhengig av den fysikalsk mindre veldefinerte øvre grensen L_0 enn korrelasjonsfunksjonene
- mye mer vanskelig å måle eksperimentelt enn for eksempel intensitet, siden midlingen inkluderer midling over fasen relativ til en uperturbert stråle,
- generelt mye mindre relevant i praksis og derfor en forholdsvis uinteressant størrelse.

Siden midlet feltstyrke er både universell (kun avhengig av atmosfæremodellene som er hovedtema til denne rapporten) og egentlig litt mindre relevant (som betyr at vi ikke ønsker å tyngne ned senere deler av rapportserien med dette), så finner vi det passende å diskutere denne størrelsen ved dette tidspunktet.

Vi husker spesielt fra del I av rapportserien at midlet feltstyrke er gitt ved

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{E}_0(\vec{\varrho}, z) e^{-2\pi^2 k^2 z \int \Phi(\kappa) \kappa d\kappa - 2\pi i k z \int \Phi(\kappa) \kappa^2 d\kappa}$$

Det betyr at

$$\Re \left(\ln \left[\frac{\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r})}{\mathbf{E}_0(\vec{\varrho}, z)} \right] \right) \approx -2\pi^2 k^2 z \int \Phi(\kappa) \kappa d\kappa,$$

er det relevante integralet, som vi kommer til å beregne her.¹ Nødvendigheten til at et integral over $\kappa \Phi(\kappa)$ skal konvergere har vi påpekt gjentatte ganger i denne rapporten, som for eksempel i diskusjonen til Kolmogorovspektret i kapittel 3.3 eller i motivasjonen til von Kármáns modell i kapittel 6. I første trinn kommer vi altså beregne integralet

$$I = 2\pi^2 \int \Phi(\kappa) \kappa d\kappa$$

for alle de fire atmosfæremodellene vi har diskutert så langt.

¹Man ser lett at imaginærdelen er undertrykt med en faktor $\frac{k_0}{k} \approx 10^{-6}$ for typiske tilfeller, som betyr at $\frac{\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r})}{\mathbf{E}_0(\vec{\varrho}, z)}$ praktisk talt er en reell størrelse (for en detaljert beregning se vedlegg C).

Vi begynner med kombinasjonen av Tatarskis modell med den eksponentielle modellen jamført kapittel 5.1. Her beregner vi integralet

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= 2\pi^2 \int \frac{5}{18\pi\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 \kappa^{-11/3} \left(e^{-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}} - e^{-\frac{\kappa^2}{\kappa_0^2}} \right) \kappa d\kappa \\ &= \frac{5\pi}{9\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 \left[\int \kappa^{-11/3} \left(e^{-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}} - 1 \right) \kappa d\kappa - \int \kappa^{-11/3} \left(e^{-\frac{\kappa^2}{\kappa_0^2}} - 1 \right) \kappa d\kappa \right]. \end{aligned}$$

Integralene evalueres til

$$\mathcal{I} = \frac{5\pi}{9\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 \left[\frac{1}{2} \kappa_m^{-5/3} \Gamma\left(-\frac{5}{6}\right) - \frac{1}{2} \kappa_0^{-5/3} \Gamma\left(-\frac{5}{6}\right) \right].$$

Vi reduserer gammafunksjonen ved hjelp av vedlegg A og får

$$\mathcal{I} = \frac{\pi\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{3\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 \left[\tilde{\kappa}_0^{-5/3} - \kappa_m^{-5/3} \right].$$

Ved hjelp av doblingsformelen har vi dessuten funnet i kapittel 4 at $\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \sqrt{\frac{3}{\pi}} 2^{-1/3}$ og vi kan forenkle resultatet videre til

$$\mathcal{I} = \frac{\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{1/3}3^{1/2}} C_n^2 \left[\tilde{\kappa}_0^{-5/3} - \kappa_m^{-5/3} \right].$$

Her innser vi at det første leddet er mye større enn det andre leddet, som vi derfor kan neglisjere. Vi fortsetter altså kun med

$$\mathcal{I} \approx \frac{\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{1/3}3^{1/2}} C_n^2 \frac{1}{\tilde{\kappa}_0^{5/3}}.$$

For å kunne sammenlikne de forskjellige modellene må vi også huske hvordan bølgetallet κ_0 avhenger av den øvre grensen L_0 . Her finner vi fra kapittel 5

$$\kappa_0 = \left(\frac{20\pi}{3\sqrt{3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)} \right)^{3/2} \frac{1}{L_0},$$

som tilsammen gir²

$$\mathcal{I} \approx \frac{\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{1/3}3^{1/2}} C_n^2 \left(\frac{3\sqrt{3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}{20\pi} \right)^{5/2} L_0^{5/3}.$$

Dette forenkler vi til

$$\mathcal{I} \approx \frac{3^{13/4}\Gamma^6\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{16/3}5^{5/2}\pi^2} C_n^2 L_0^{5/3},$$

²Her og ellers i dette kapittelet approksimerer vi $\tilde{\kappa}_0 \approx \kappa_0$.

der den numeriske faktoren evalueres til 0, 590.

Vi fortsetter med von Kármáns modell og beregner integralet

$$\mathcal{I} = 2\pi^2 \int \frac{5}{18\pi\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{C_n^2}{\left(\kappa^2 + \kappa_0^2\right)^{11/6}} e^{-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}} \kappa d\kappa.$$

Integralet evalueres til

$$\mathcal{I} = \frac{5\pi}{18\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{C_n^2}{\kappa_m^{5/3}} e^{\frac{\kappa_0^2}{\kappa_m^2}} \Gamma\left(-\frac{5}{6}, \frac{\kappa_0^2}{\kappa_m^2}\right),$$

der $\Gamma(a, x)$ er den ufullstendige gammafunksjonen. Selv om dette er et fint og kompakt resultat, ønsker vi å uttrykke den ufullstendige gammafunksjonen ved hjelp av en kombinasjon av to konfluent hypergeometriske funksjoner. For dette skriver vi først

$$\Gamma(a, x) = x^a e^{-x} \Psi(1, 1 + a; x),$$

der vi videre uttrykker $\Psi(\alpha, \gamma; x)$ ved

$$\Psi(\alpha, \gamma; x) = \frac{\Gamma(1 - \gamma)}{\Gamma(\alpha - \gamma + 1)} {}_1F_1(\alpha; \gamma; x) + \frac{\Gamma(\gamma - 1)}{\Gamma(\alpha)} x^{1-\gamma} {}_1F_1(\alpha - \gamma + 1; 2 - \gamma; x),$$

som betyr at vi får tilsammen

$$\Gamma(a, x) = x^a e^{-x} \left[\frac{\Gamma(-a)}{\Gamma(1 - a)} {}_1F_1(1; 1 + a; x) + \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(1)} x^{-a} {}_1F_1(1 - a; 1 - a; x) \right].$$

Dermed får vi

$$\mathcal{I} = \frac{5\pi}{18\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{C_n^2}{\kappa_0^{5/3}} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} {}_1F_1\left(1; \frac{1}{6}; \frac{\kappa_0^2}{\kappa_m^2}\right) + \Gamma\left(-\frac{5}{6}\right) \left(\frac{\kappa_0^2}{\kappa_m^2}\right)^{\frac{5}{6}} {}_1F_1\left(\frac{11}{6}; \frac{11}{6}; \frac{\kappa_0^2}{\kappa_m^2}\right) \right],$$

som vi kan forenkle ved å redusere gammafunksjonene jamført vedlegg A til

$$\mathcal{I} = \frac{\pi}{3\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 \left[\frac{1}{\kappa_0^{5/3}} {}_1F_1\left(1, \frac{1}{6}; \frac{\kappa_0^2}{\kappa_m^2}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \frac{1}{\kappa_m^{5/3}} {}_1F_1\left(\frac{11}{6}, \frac{11}{6}; \frac{\kappa_0^2}{\kappa_m^2}\right) \right].$$

Her innser vi igjen at det første leddet er mye større enn det andre leddet, som vi igjen kan neglisjere. Videre ser vi at argumentet til den konfluent hypergeometriske funksjonen blir veldig liten. Vi approksimerer derfor denne funksjonen ved den laveste (nullte) orden i sin Taylorrekkeutviklingen, som er lik 1, og vi fortsetter dermed kun med

$$\mathcal{I} \approx \frac{\pi}{3\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 \frac{1}{\kappa_0^{5/3}}.$$

I von Kármáns modell avhenger bølgetallet κ_0 av den øvre grensen L_0 på følgende måte (se kapittel 6)

$$\kappa_0 = \left(\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{3} \cdot 2^{1/3} \pi} \right)^{3/2} \frac{1}{L_0},$$

som tilsammen gir

$$I \approx \frac{\pi}{3\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 \left(\frac{\sqrt{3} \cdot 2^{1/3} \pi}{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)} \right)^{5/2} L_0^{5/3}.$$

Dette forenkler vi til

$$I \approx \frac{2^{5/6} 3^{1/4} \pi^{7/2}}{\Gamma^6\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 L_0^{5/3},$$

der den numeriske faktoren evalueres til 0,349.

Neste modell er den modifiserte atmosfæriske modellen der vi beregner integralet

$$I = 2\pi^2 \int \frac{5}{18\pi\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \left[1 + a_1 \left(\frac{\kappa}{\kappa_m} \right) - a_2 \left(\frac{\kappa}{\kappa_m} \right)^{7/6} \right] \frac{C_n^2}{(\kappa^2 + \kappa_0^2)^{11/6}} e^{-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}} \kappa d\kappa.$$

Ved hjelp av substitusjonen $x = \frac{\kappa^2 + \kappa_0^2}{\kappa_m^2}$ og med forkortelsen $u = \frac{\kappa_0^2}{\kappa_m^2}$ kan integralet skrives som

$$I = \frac{5\pi}{18\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{C_n^2}{\kappa_m^{5/3}} e^u \int_u^\infty \left[1 + a_1(x-u)^{1/2} - a_2(x-u)^{7/12} \right] x^{-11/6} e^{-x} dx.$$

Integralet evalueres til

$$I = \frac{5\pi}{18\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{C_n^2}{\kappa_m^{5/3}} e^u \left[\Gamma\left(-\frac{5}{6}, u\right) + a_1 u^{-2/3} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) e^{-u/2} W_{-\frac{7}{6}, \frac{1}{6}}(u) - a_2 u^{-5/8} \Gamma\left(\frac{19}{12}\right) e^{-u/2} W_{-\frac{29}{24}, \frac{1}{8}}(u) \right],$$

der $W_{\lambda, \mu}(x)$ er Whittakerfunksjonen. Igjen, så er dette et kompakt resultat, men som vanlig, ønsker vi å formulere resultatet ved hjelp av konfluent hypergeometriske funksjoner. Vi formulerer først Whittakerfunksjonen $W_{\lambda, \mu}(x)$ som en kombinasjon av Whittakerfunksjonene $M_{\lambda, \pm\mu}(x)$ ved

$$W_{\lambda, \mu}(x) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \mu - \lambda\right)} M_{\lambda, \mu}(x) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - \lambda\right)} M_{\lambda, -\mu}(x),$$

for så å reformulere disse Whittakerfunksjonene ved hjelp av konfluent hypergeometriske funksjoner ved

$$M_{\lambda, \mu}(x) = x^{\mu+1/2} e^{-x/2} {}_1F_1\left(\mu - \lambda + \frac{1}{2}; 2\mu + 1; x\right).$$

Vi får dermed tilsammen

$$I = \frac{5\pi}{18\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{C_n^2}{\kappa_m^{5/3}} e^u \left[\left(u^{-5/6} e^{-u} \right) \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} {}_1F_1\left(1; \frac{1}{6}; u\right) + \Gamma\left(-\frac{5}{6}\right) u^{5/6} {}_1F_1\left(\frac{11}{6}; \frac{11}{6}; u\right) \right\} \right. \\ \left. + a_1 u^{-2/3} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) e^{-u/2} \left\{ \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} u^{2/3} e^{-u/2} {}_1F_1\left(\frac{11}{6}; \frac{4}{3}; u\right) + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} u^{1/3} e^{-u/2} {}_1F_1\left(\frac{3}{2}; \frac{2}{3}; u\right) \right\} \right. \\ \left. - a_2 u^{-5/8} \Gamma\left(\frac{19}{12}\right) e^{-u/2} \left\{ \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{19}{12}\right)} u^{5/8} e^{-u/2} {}_1F_1\left(\frac{11}{6}; \frac{5}{4}; u\right) + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} u^{3/8} e^{-u/2} {}_1F_1\left(\frac{19}{12}; \frac{3}{4}; u\right) \right\} \right].$$

Her husker vi at $u = \frac{\kappa_0^2}{\kappa_m^2}$, altså en veldig liten parameter. Det største leddet (og det eneste som vi vil regne videre med) er nå det leddet med lavest orden i u , altså det aller første leddet. Videre kommer vi til å approksimere den konfluent hypergeometriske funksjonen i det leddet ved nullte orden i sin Taylorrekkeutviklingen, det vil si ved ${}_1F_1 \sim 1$. Dermed bruker vi

$$\mathcal{I} \approx \frac{5\pi}{18\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{C_n^2}{\kappa_m^{5/3}} \left(\frac{\kappa_0^2}{\kappa_m^2}\right)^{-5/6} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)},$$

som vi kan forenkle og der vi kan redusere gammafunksjonene ved hjelp av vedlegg A til

$$\mathcal{I} \approx \frac{\pi}{3\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 \frac{1}{\kappa_0^{5/3}}.$$

Også for den modifiserte atmosfæriske modellen gjaldt

$$\kappa_0 = \left(\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{3} \cdot 2^{1/3}\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{L_0},$$

som betyr at vi ender opp med nøyaktig det samme resultatet som for von Kármáns modell, det vil si med

$$\mathcal{I} \approx \frac{2^{5/6} 3^{1/4} \pi^{7/2}}{\Gamma^6\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 L_0^{5/3}.$$

Fjerde og siste modell er den modifiserte atmosfæriske modellen med alternativ demping ved øvre grense, der vi beregner integralet

$$\mathcal{I} = 2\pi^2 \int \frac{5}{18\pi\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \left[1 + a_1\left(\frac{\kappa}{\kappa_m}\right) - a_2\left(\frac{\kappa}{\kappa_m}\right)^{7/6}\right] C_n^2 \kappa^{-11/3} \left(e^{-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}} - e^{-\frac{\kappa^2}{\tilde{\kappa}_0^2}}\right) \kappa d\kappa.$$

Vi deler opp integralet igjen i

$$\begin{aligned} \mathcal{I} = \frac{5\pi}{9\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 & \left\{ \int \left[1 + a_1\left(\frac{\kappa}{\kappa_m}\right) - a_2\left(\frac{\kappa}{\kappa_m}\right)^{7/6}\right] \left(e^{-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}} - 1\right) \kappa d\kappa \right. \\ & \left. - \int \left[1 + a_1\left(\frac{\kappa}{\kappa_m}\right) - a_2\left(\frac{\kappa}{\kappa_m}\right)^{7/6}\right] \left(e^{-\frac{\kappa^2}{\tilde{\kappa}_0^2}} - 1\right) \kappa d\kappa \right\}. \end{aligned}$$

Integralene evalueres til

$$\begin{aligned} \mathcal{I} = \frac{5\pi}{9\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 & \left\{ \frac{1}{2} \kappa_m^{-5/3} \left[\Gamma\left(-\frac{5}{6}\right) + a_1 \Gamma\left(-\frac{1}{3}\right) - a_2 \Gamma\left(-\frac{1}{4}\right) \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \tilde{\kappa}_0^{-5/3} \left[\Gamma\left(-\frac{5}{6}\right) + a_1 \left(\frac{\tilde{\kappa}_0}{\kappa_m}\right) \Gamma\left(-\frac{1}{3}\right) - a_2 \left(\frac{\tilde{\kappa}_0}{\kappa_m}\right)^{7/6} \Gamma\left(-\frac{1}{4}\right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Igjen, siden κ_0 er en liten parameter, så beholder vi kun laveste ordens leddet i denne parameteren og vi fortsetter kun med

$$\mathcal{I} \approx \frac{5\pi}{9\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 \left\{ -\frac{1}{2} \tilde{\kappa}_0^{-5/3} \Gamma\left(-\frac{5}{6}\right) \right\}.$$

Her kan vi nå redusere gammafunksjonen jamført vedlegg A og forenkle uttrykket til

$$\mathcal{I} \approx \frac{\pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{1/3} 3^{1/2}} C_n^2 \frac{1}{\tilde{\kappa}_0^{5/3}}.$$

Dette er samme resultat som for kombinasjonen av Tatarskis modell med den eksponentielle modellen, og siden også bølgetallet κ_0 avhenger av den øvre grensen L_0 på samme måte som i denne modellen, ender man opp med identisk sluttresultat, som er

$$\mathcal{I} \approx \frac{3^{13/4} \Gamma^6\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{16/3} 5^{5/2} \pi^2} C_n^2 L_0^{5/3}.$$

modeller	\mathcal{A}	tilnærmet numerisk verdi
kombinasjonen av Tatarskis modell med den eksponentielle modellen og modifisert atmosfærisk modell med alternativ demping ved øvre grense	$\frac{3^{13/4} \Gamma^6\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{10/3} 5^{5/2}}$	23,311
von Kármáns modell og modifisert atmosfærisk modell	$\frac{2^{17/6} 3^{1/4} \pi^{11/2}}{\Gamma^6\left(\frac{1}{3}\right)}$	13,764

Tabell 8.1 Analytiske uttrykk og tallverdier for \mathcal{A} i dempningsfaktoren til midlet feltstyrke for fire modeller. Hvis man antar en bølgelengde λ tilsvarende 633 nm og en øvre grense L_0 rundt 10 m, så finner man for moderat turbulens ($C_n^2 = 10^{-15} \text{ m}^2/3$) en lengde rundt 0,5 m der midlet feltstyrke minker med omtrent en faktor e.

Med resultater for fire forskjellige atmosfæremodeller kan vi nå formulere dempningsfaktoren til midlet (relativ) feltstyrke ved

$$\frac{\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r})}{\mathbf{E}_0(\mathbf{r})} \approx e^{-k^2 z \mathcal{I}}.$$

Hvis vi formulerer eksponenten til dempningsfaktoren ved hjelp av bølgelengde λ istedenfor bølgetall k , finner vi

$$-k^2 z \mathcal{I} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} z \mathcal{I}.$$

Siden vi har funnet ut at i alle beregnede tilfeller, så lar seg integralet \mathcal{I} formulere som

$$\mathcal{I} = A C_n^2 L_0^{5/3},$$

der A representerer forskjellige numeriske verdier, kan eksponenten til dempningsfaktoren altså skrives som

$$-k^2 z \mathcal{I} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} z A C_n^2 L_0^{5/3} = -\mathcal{A} \frac{C_n^2 L_0^{5/3} z}{\lambda^2},$$

der $\mathcal{A} = 4\pi^2 A$. Tabell 8.1 gir både analytiske uttrykk og tilnærmete tallverdier for \mathcal{A} . Der ser man også at de modifiserte atmosfæriske modellene gir samme tallverdier som de litt enklere modellene med samme tilsvarende dempning ved øvre grense. Dette kan lett forstås ved at modifiseringen i de atmosfæriske modellene gjelder stort sett et lite område ved den nedre grensen. Siden nedre grense neglisjeres i alle uttrykk, så ender man altså opp med identiske verdier.

9 Konklusjon og fremtidsutsikt

Vi har i denne rapporten undersøkt optisk turbulens. Helt konkret har vi undersøkt modeller for en turbulent atmosfære og spesielt det stokastiske feltet som modellerer brytningsindeksfluktuasjoner. Et slikt felt er typisk gitt ved en strukturfunksjon, som består hovedsakelig av et turbulent område (ved relevante avstander), et dissipativt område ved små avstander (typisk under 2–3 mm) der kinetisk energi overføres til varme og et ukorrelert område ved så store avstander at fluktuasjonene ikke viser noe korrelasjon med hverandre. Strukturfunksjonen kan transformeres til en spektralfunksjon (og omvendt) og det er spektralfunksjonen som inngår i formalismen, som vi har diskutert i del I av rapportserien. Den aller enkleste modellen (Kolmogorovs modell inkludert et dissipativt og et ukorrelert område) gir kun en kontinuerlig, men ikke differensierbar strukturfunksjon, som derfor ikke lar seg transformere til noe spektralfunksjon. Mye av rapporten dreier seg derfor om måter å danne en egnet kombinasjon av strukturfunksjon og spektralfunksjon, der strukturfunksjonen likner den enkle modellen og der spektralfunksjonen både eksisterer og oppfyller visse matematiske krav slik at den kan brukes i formalismen fra del I. Den faktiske fremgangsmåten er at man formulerer en spektralfunksjon (med de ønskete matematiske egenskapene) for så å beregne den tilsvarende strukturfunksjonen, der parameterne fikses slik at den likner mest mulig den enkle modellen. Til sammen kan vi formulere fire forskjellige modeller. Først Tatarskis modell i kombinasjon med den eksponentielle modellen, så von Kármáns modell, og så begge disse modeller modifisert ved en liten ekstra forhøyning i nærheten av overgangen mellom det turbulente og det dissipative området. De siste to modellene kalles modifiserte atmosfæriske modeller. Til slutt beregner vi de enkleste forventningsverdiene fra del I (de som gir midlet feltstyrke) for alle de fire atmosfæremodellene.

I videre deler av rapportserien kommer vi til å diskutere høyere forventningsverdier (andre- og fjerdegrads korrelasjonsfunksjoner) og hvordan disse er relatert til eksperimentelle størrelser som for eksempel midlet stråleintensitet (som igjen er knyttet til stråleradius og -vandring) og scintillasjonsindeks. I motsetning til midlet feltstyrke er slike størrelser i større grad avhengig av konkrete optiske systemer og kan derfor ikke uten videre beregnes på generelt grunnlag. Videre ønsker vi å sammenlikne analytiske verdier (for konkrete optiske systemer) med resultater fra simuleringer basert på programmet Sisyfos til G. Arisholm, og muligens eksperimentelle målinger. Det er derfor fortsatt en god del jobb å gjøre i nærmeste fremtid.

A Gammafunksjon

Flere steder i denne rapporten dukker det opp gammafunksjonen for konkrete argumenter. Gammafunksjonen er definert ved integralet

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Stort sett er det kun nødvendig å kjenne gammafunksjonen for argumenter mellom 0 og $\frac{1}{2}$. Gammafunksjonen for alle andre argumenter kan reduseres til gammafunksjonen for argumenter i dette området. Dette kan oppnås i to trinn. I første trinn, hvis argumentet er større enn 1 (eller mindre enn 0), så kan argumentet reduseres ved

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

som er en relasjon som lett kan utledes fra definisjonen.

Videre, hvis argumentet til gammafunksjonen er mellom $\frac{1}{2}$ og 1, så kan argumentet reduseres ved Eulers refleksjonsformel

$$\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\Gamma(x) \sin(\pi x)},$$

som impliserer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. For heltallige positive argumenter gjelder selvfølgelig det enkle

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

som impliserer $\Gamma(1) = 1$ (og som også kan utledes fra definisjonen). For heltallige negative argumenter og ved 0, så er gammafunksjonen ikke definert.

Noen ganger i rapporten brukes også Legendres doblingsformel, som er gitt ved

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Noen konkrete verdier som brukes i rapporten er gitt ved

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 2,678\,938\,534\,707\,747\,6337\dots$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = 3,625\,609\,908\,221\,908\,3119\dots$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{5}\right) = 4,590\,843\,711\,998\,803\,0532\dots$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) = 5,566\,316\,001\,780\,235\,2043\dots$$

For mindre og mindre argumenter kan gammafunksjonen approksimeres ved $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \sim n - 1 + \gamma$, der γ er Euler-Mascheroni konstanten.

B Evaluering av integralet

I løpet av diskusjonen i denne rapporten behøver vi gjentatte ganger å evaluere et integral av typen

$$\int x^\alpha e^{-\frac{x^2}{x_0^2}} \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) dx.$$

Dette integralet ser ikke ut til å finnes i boken til Gradshteyn og Ryzhik. Derfor skal vi evaluere integralet selv. I første trinn bruker vi Taylorrekken til sinusfunksjonen

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

for å kunne formulere uttrykket i parenteser i integralet som

$$\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Med dette uttrykket kan vi integrere potensrekken ledd for ledd ved

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \int x^{2n+\alpha} e^{-\frac{x^2}{x_0^2}} dx,$$

som evalueres til

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \frac{1}{2} \Gamma\left(n + \frac{\alpha+1}{2}\right) x_0^{2n+\alpha+1}$$

under forutsetningen at $\alpha > -2$.

Prinsipielt kunne man avslutte her, men det kan være greit å formulere potensrekken som en høyere transcendent funksjon, for å oppnå en mere kompakt notasjon. For dette utvider vi summen til å begynne ved $n = 0$ og trekker samtidig fra det nye leddet

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \frac{1}{2} \Gamma\left(n + \frac{\alpha+1}{2}\right) x_0^{2n+\alpha+1} + \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) x_0^{\alpha+1}.$$

Her kan vi nå faktorisere til

$$\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) x_0^{\alpha+1} \left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{\Gamma\left(n + \frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)} x_0^{2n}\right].$$

Hvis vi nå introduserer Pochhammersymbolet

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)},$$

så kan vi skrive resultatet i en Taylorrekke med

$$\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) x_0^{\alpha+1} \left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_n (x_0^2)^n \right].$$

I et siste trinn må faktoren $(2n+1)!$ bringes på en standardform. For dette formulerer vi faktoren ved hjelp av gammafunksjonen ved

$$(2n+1)! = \Gamma(2n+2) = \Gamma(2[n+1]).$$

Her kan vi nå bruke Legendres doblingsformel, som gir

$$\begin{aligned} \Gamma(2[n+1]) &= \frac{2^{2[n+1]-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma([n+1]) \Gamma\left([n+1] + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2^{2n+1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(n+1) \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

Den første gammafunksjonen gir nå simpelthen $\Gamma(n+1) = n!$, mens den andre gammafunksjonen erstattes med et Pochhammersymbol ved $\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right)_n = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \left(\frac{3}{2}\right)_n$, der vi har brukt funksjonsverdien til gammafunksjonen for argumentet $\frac{3}{2}$. Til sammen får vi altså

$$(2n+1)! = 2^{2n} n! \left(\frac{3}{2}\right)_n.$$

Hvis vi bruker dette uttrykket i Taylorrekken får vi

$$\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) x_0^{\alpha+1} \left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} \frac{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_n}{\left(\frac{3}{2}\right)_n} (x_0^2)^n \right]$$

eller, etter en liten reorganisering

$$\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) x_0^{\alpha+1} \left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_n}{\left(\frac{3}{2}\right)_n} \left(-\left[\frac{x_0}{2}\right]^2\right)^n \right],$$

som er standardformen til Taylorrekken til en hel klasse av funksjoner som kalles generalisert hypergeometriske funksjoner. Denne klassen av funksjoner skrives gjerne som

$${}_aF_b(\alpha_1, \dots, \alpha_a; \beta_1, \dots, \beta_b; y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(\alpha_1)_n \cdots (\alpha_a)_n}{(\beta_1)_n \cdots (\beta_b)_n} y^n,$$

der a er lik antall Pochhammersymboler i telleren (dens argumenter $\alpha_1, \dots, \alpha_a$ blir listet før første semikolon), og b er antall Pochhammersymboler i nevneren (dens argumenter β_1, \dots, β_b blir listet mellom de to semikolonene), og y er argumentet til selve funksjonen og blir notert etter andre semikolon. Dermed kan vår Taylorrekke skrives kompakt som

$$\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) x_0^{\alpha+1} \left[1 - {}_1F_1\left(\frac{\alpha+1}{2}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{x_0}{2}\right)^2\right) \right].$$

Noen av de generalisert hypergeometriske funksjonene har fått egne navn. For eksempel kalles ${}_2F_1$ også simpelthen hypergeometrisk funksjon. ${}_1F_1$ er derimot spesifisert som konfluent hypergeometrisk funksjon. Dessverre avviker MatLab dokumentasjonen fra dette internasjonalt felles nomenklaturet.

C Faseforskyvningen til midlet feltstyrke

I kapittel 8 hoppet vi over beregningen av imaginærdelen i eksponenten (det vil si faseforskyvningen) til midlet feltstyrke. Siden vi allerede vet fra beregningen av reelldelen at dempningen ved (eller noen form for modifisering i nærheten av) nedre grense kan neglisjeres, beregner vi imaginærdelen kun for de to mulighetene for dempning ved øvre grense som vi har diskutert så langt: den eksponentielle dempningen fra kapittel 5 og den forenklete von Kármán modellen fra kapittel 6. Vi kommer altså til å beregne integralet

$$\mathcal{J} = 2\pi \int \Phi(\kappa) \kappa^2 d\kappa$$

for både

$$\Phi(\kappa) = \frac{5}{18\pi\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} C_n^2 \kappa^{-11/3} \left(1 - e^{-\frac{\kappa^2}{\kappa_0^2}}\right)$$

og

$$\Phi(\kappa) = \frac{5}{18\pi\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{C_n^2}{(\kappa^2 + \kappa_0^2)^{11/6}}.$$

Den eksponentielle dempningen gir dermed integralet

$$\mathcal{J} = \frac{5C_n^2}{9\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \int \kappa^{-5/3} \left(1 - e^{-\frac{\kappa^2}{\kappa_0^2}}\right) d\kappa,$$

som evalueres til

$$\mathcal{J} = -\frac{5C_n^2}{9\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)}{2\kappa_0^{2/3}}.$$

Vi reduserer gammafunksjonen ved hjelp av vedlegg A og får

$$\mathcal{J} = \frac{5\pi}{3\sqrt{3}} \frac{C_n^2}{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right) \kappa_0^{2/3}}.$$

Videre husker vi hvordan bølgetallet κ_0 avhenger av den øvre grensen fra kapittel 5

$$\kappa_0 = \left(\frac{20\pi}{3\sqrt{3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}\right)^{3/2} \frac{1}{L_0},$$

som tilsammen gir

$$\mathcal{J} = \frac{1}{4} C_n^2 L_0^{2/3}.$$

Vi fortsetter med den forenklete von Kármán modellen, som gir integralet

$$\mathcal{J} = \frac{5C_n^2}{9\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \int \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \kappa_0^2)^{11/6}} d\kappa,$$

som evalueres til

$$\mathcal{J} = \frac{5C_n^2}{9\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right)}{2\kappa_0^{2/3}},$$

der $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ er betafunksjonen. Vi formulerer betafunksjonen ved den gitte kombinasjonen av gammafunksjoner, vi reduserer disse ved hjelp av vedlegg A og får

$$\mathcal{J} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{12\sqrt{\pi}} \frac{C_n^2}{\kappa_0^{2/3}}.$$

Videre husker vi hvordan bølgetallet κ_0 avhenger av den øvre grensen fra kapittel 6

$$\kappa_0 = \left(\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{3} \cdot 2^{1/3} \pi} \right)^{3/2} \frac{1}{L_0},$$

og at $\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)} = \sqrt{\frac{3}{\pi}} 2^{-1/3}$, som tilsammen gir

$$\mathcal{J} = \frac{1}{4} C_n^2 L_0^{2/3},$$

det vil si akkurat det samme som før.

Vi kan nå formulere dempningsfaktoren inkludert faseforskyvningen som

$$\frac{\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r})}{\mathbf{E}_0(\mathbf{r})} \approx e^{-k^2 z \mathcal{I} - ikz \mathcal{J}}$$

jamført kapittel 8, med tilsammen

$$-k^2 z \mathcal{I} - ikz \mathcal{J} = -(\mathcal{A} + i\mathcal{B}) \frac{C_n^2 L_0^{5/3} z}{\lambda^2},$$

der \mathcal{A} for de forskjellige modellene er gitt i tabell 8.1 og $\mathcal{B} = \frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{L_0}$ er det samme for alle modeller. Med de tallverdiene som er gitt eksempelvis i tabell 8.1 ser man at $\mathcal{B} \approx 10^{-7}$ som dermed er omtrent 8 størrelsesordener mindre enn \mathcal{A} . Det er grunnen for at man trygt kan neglisjere faseforskyvningen.

Om FFI

Forsvarets forskningsinstitutt ble etablert 11. april 1946. Instituttet er organisert som et forvaltningsorgan, med særskilte fullmakter underlagt Forsvarsdepartementet.

FFIs formål

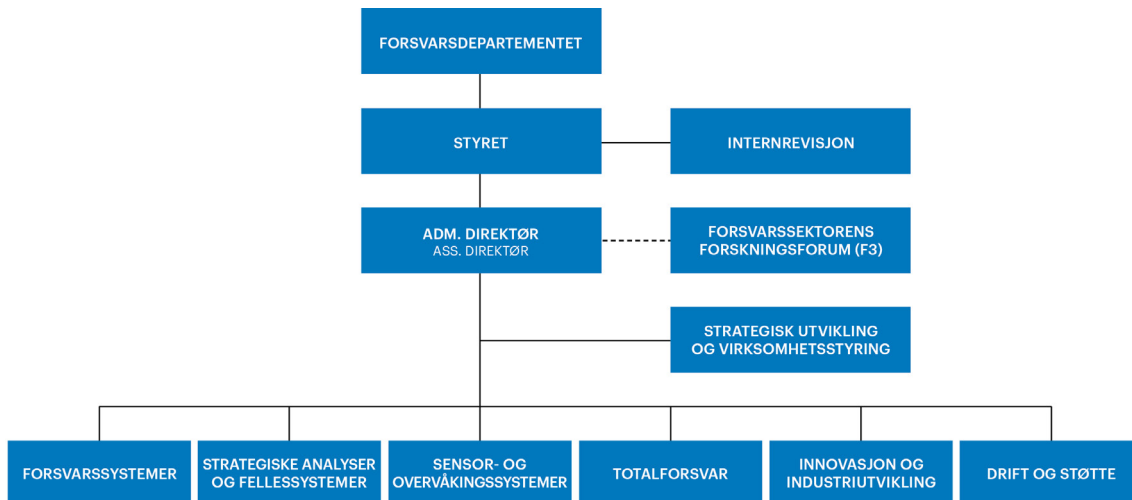
Forsvarets forskningsinstitutt er Forsvarets sentrale forskningsinstitusjon og har som formål å drive forskning og utvikling for Forsvarets behov. Videre er FFI rådgiver overfor Forsvarets strategiske ledelse. Spesielt skal instituttet følge opp trekk ved vitenskapelig og militærteknisk utvikling som kan påvirke forutsetningene for sikkerhetspolitikken eller forsvarsplanleggingen.

FFIs visjon

FFI gjør kunnskap og ideer til et effektivt forsvar.

FFIs verdier

Skapende, drivende, vidsynt og ansvarlig.



Forsvarets forskningsinstitutt (FFI)
Postboks 25
2027 Kjeller

Besøksadresse:
Kjeller: Instituttveien 20, Kjeller
Horten: Nedre vei 16, Karljohansvern, Horten

Telefon: 91 50 30 03
E-post: post@ffi.no
ffi.no

Norwegian Defence Research Establishment (FFI)
PO box 25
NO-2027 Kjeller
NORWAY

Visitor address:
Kjeller: Instituttveien 20, Kjeller
Horten: Nedre vei 16, Karljohansvern, Horten

Telephone: +47 91 50 30 03
E-mail: post@ffi.no
ffi.no/en